

Nichtlineare Dynamik in Multisektions- Quantenpunktlasern

Diplomarbeit

von
Christian Otto

angefertigt am
Institut für Theoretische Physik
der Technischen Universität Berlin

Berlin Februar 2009

Betreuer:
Prof. a.D. Dr. Ingo Peschel
Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Theoretische Grundlagen	4
2.1. Halbleitermaterialien	4
2.2. Niedrigdimensionale Halbleiterstrukturen	5
2.2.1. Quantenpunkte	6
2.3. Funktionsprinzip eines Halbleiterlasers	7
2.4. Der optische Füllfaktor Γ	10
2.5. Brechung und Reflexion elektromagnetischer Wellen	11
2.6. Näherung der langsam veränderlichen Amplitude	13
3. Ratengleichungsmodell für Halbleiterlaser	15
3.1. Herleitung der Ratengleichung des elektrischen Feldes	15
3.1.1. Elektromagnetische Wellen in dielektrischer Materie	15
3.1.2. Zusammenhang von Suszeptibilität und optischen Größen	18
3.1.3. Adiabatische Eliminierung der Polarisierung	22
3.2. Lösung der Feldgleichung in dem Resonator	23
3.2.1. Normierung des elektrischen Feldes	32
3.3. Bewegungsgleichung der Ladungsträgerinversion	33
3.4. Dreivariablen Ratengleichungssystem	35
3.5. Der linienbreitenvergrößernde Faktor α	37
3.5.1. Der α -Faktor in Quantenpunktlasern	39
3.5.2. Einführung des α -Faktors in das Modell	40
3.6. Spontane Emission in der Feldgleichung	42
4. Das Lang-Kobayashi-Modell	44
4.1. Herleitung des LK-Modells	44
4.2. Grenzen des Lang-Kobayashi-Modells	48
4.3. Halbleiterlaser mit integriertem passiven Resonator	50
5. Ratengleichungsmodell für einen Quantenpunktlaser	53
5.1. Laserstruktur	53
5.2. Ratengleichungen	54
5.2.1. Nichtlineare Streuraten	58
6. Zusammenfügen beider Modelle	63

7. Dynamik der Laserdiode	68
7.1. Grundlagen	68
7.2. Fixpunkte der Ratengleichungen ohne Rückkopplung	71
7.2.1. Stationärer Zustand unterhalb der Laserschwelle	72
7.2.2. Stationärer Zustand oberhalb der Laserschwelle	73
7.2.3. Dichten an der Laserschwelle	76
7.2.4. Vergleich mit den numerisch errechneten Größen	77
7.3. Stark gedämpftes und oszillatorisches Regime	80
8. Laserdynamik mit Rückkopplung	85
8.1. Fixpunkte des Gleichungssystems mit Rückkopplung	86
8.1.1. Bedingung für die Existenz mehrerer Resonatormoden	90
8.1.2. Der Unterschied langer und kurzer externer Kavitäten	93
8.2. Bifurkationen in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke	95
8.2.1. Begriffe aus der Bifurkationstheorie	95
8.2.2. Bifurkationen für $\alpha = 1$, $\Gamma = 0.0011$	98
8.3. Einfluss des α - und des Γ -Faktors auf die Laserdynamik	110
8.3.1. Abhängigkeit der Laserdynamik vom α -Faktor	110
8.3.2. Abhängigkeit der Laserdynamik von dem Γ -Faktor	118
8.4. Phasenabhängigkeit des Bifurkationsdiagramms	121
9. Zusammenfassung und Ausblick	125
9.1. Ausblick	126
A. Ito-Transformation	127
A.1. Theoretische Grundlagen	127
A.2. Anwendung auf Bewegungsgleichung ohne Rückkopplung	129
A.3. Transformation der Bewegungsgleichung mit Rückkopplung	130
Literaturverzeichnis	132

1. Einleitung

Halbleiterlaser werden aufgrund ihrer geringen Abmessungen und Stückpreise in vielen technologischen Anwendungen eingesetzt. Dabei werden heutzutage vorwiegend Quantengrabenlaser verwendet. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um Doppelheterostrukturlaser, bei denen die Dicke der aktiven Schicht geringer ist als die de-Broglie Wellenlänge der Ladungsträger. Dies führt zu einer Diskretisierung des Energieniveaus senkrecht zu der Schichtung. Die Energiebänder des Volumenkristalls spalten zu zweidimensionalen Subbändern auf. Dadurch verändert sich die Energie-Zustandsdichte, so dass geringere Schwellströme ermöglicht werden [CHO94].

Bei optischen Aufbauten lassen sich Reflexionen eines Teils des Laserlichts an anderen Bauelementen nicht vollständig vermeiden. Da Quantengrabenlaser sehr sensibel auf Rückkopplung reagieren, müssen teure optische Isolatoren verwendet werden, um eine stabile Laseremission zu gewährleisten. Zusätzlich wird dadurch die Komplexität des jeweiligen Bauteils erhöht. Quantengrabenlaser haben aus technologischer Sicht also zwei entscheidende Nachteile: Zum einen kann bereits durch geringe Rückkopplungen die Strahlqualität vermindert werden. Dies führt zu räumlichen Instabilitäten in Form von Filamentbildung. Zum anderen kann die Rückkopplung zu zeitlichen Instabilitäten des Laserstrahls führen. Dieser Effekt ist in der Literatur als Kohärenzkollaps bekannt [KAN05]. Dabei verbreitert sich die Linienbreite des Lasers deutlich und das relative Intensitätsrauschen der Laserdiode nimmt stark zu. Dadurch wird die Kohärenzlänge des Laserlichtes verringert. Der Kohärenzkollaps tritt je nach Struktur des Quantengrabenlasers schon bei geringen rückgekoppelten Intensitäten im Bereich von -45 dB auf [TKA86].

Es besteht die Hoffnung, dass in Zukunft durch die Verwendung von Quantenpunktlasern (**QP-Lasern**) in einem Teil der Anwendungen auf optische Isolatoren verzichtet werden kann. Quantenpunkte sind nulldimensionale Halbleiterstrukturen, das heißt, die elektronischen Zustände sind in drei Raumdimensionen lokalisiert. Der für den Laserbetrieb entscheidende strahlende Übergang findet zwischen diskreten Energieniveaus statt. Dies führt zu einer gegenüber Quantengrabenlasern reduzierten Schwellstromdichte, die zudem noch nahezu temperaturunabhängig ist [BIM99]. Die Diskretisierung der Energieniveaus bewirkt zusätzlich ein symmetrischeres Gewinnprofil. Dies verringert die Phasen-Amplitudenkopplung, was sich in kleineren α -Faktoren ausdrückt [POE05, UKH04, NEW99a]. Zusammen mit einer stärkeren Lokalisierung der Ladungsträgerinversion führen geringere α -Faktoren zu einer im Vergleich mit Quantengrabenlasern gleicher Wellenleiterstruktur höheren Strahlqualität

[GEH04, Rib03]. Zusätzlich weisen QP-Laser eine geringere Kopplung zwischen den Ladungsträgern und dem elektrischen Feld auf, die durch einen kleineren optischen Füllfaktor Γ beschrieben wird. Die geringere Kopplung bewirkt stärker gedämpfte Relaxationsoszillationen höherer Frequenz [LUE08]. Aufgrund kleiner Phasen-Amplitudenkopplung α und stark gedämpften Relaxationsoszillationen zeigen QP-Laser eine geringere Sensitivität gegenüber optischer Rückkopplung als vergleichbare Quantengrabenlaser [SU03, CAR06a, CAR05].

Es gibt auch technologische Anwendungen, die gerade durch optische Rückkopplung ermöglicht werden. Von besonderem Interesse sind in diesem Zusammenhang integrierte Multisektionslaser. Dies sind Halbleiterlaser, die aus einer aktiven Sektion und einer oder mehreren passiven Sektionen bestehen. Die passive Sektion ist im Wesentlichen aus dem gleichen Halbleitermaterial gefertigt, wie die aktive. Daher darf sie nur wenige Millimeter lang sein, da sonst aufgrund der hohen Materialverluste zu wenig Licht in den Laser zurückgekoppelt würde. Im Allgemeinen ermöglichen integrierte Strukturen eine sehr kompakte Bauweise ohne bewegliche Teile. Ein weiterer Vorteil integrierter passiver Sektionen ist, dass durch das Anlegen eines geringen Stromes der Brechungsindex in dieser verändert werden kann. Dies ändert die optische Weglänge und damit die Phase, mit der das Licht wieder in die aktive Sektion eingekoppelt wird [USH04]. Die Rückkopplungsphase ist in dem Fall kurzer Kavitäten von besonderem Interesse, da sie in diesem Einfluss auf das dynamische Verhalten des Lasers hat. So wird mit direktmodulierten integrierten Zweisektionslasern durch Trimmung der Rückkopplungsphase eine Modulationsrate von 40 GHz realisiert [RAD07]. Dies ist derzeitiger Telekommunikationsstandard. Mit direktmodulierten Einsektionslasern werden derzeit hingegen nur Modulationsraten um die 10 GHz erreicht. Direktmoduliert bedeutet, dass der Laser direkt über den angelegten Strom getaktet wird, was besonders einfach und damit kostengünstig ist.

Nicht nur aus technologischer Sicht sind QP-Laser mit Rückkopplung interessant. So zeigen Halbleiterlaser unter optischer Rückkopplung komplexe Bifurkationsszenarien. In Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke wechseln sich stabile stationäre Zustände des Systems mit Bewegungen auf stabilen periodischen Orbits und mit chaotischen Verhalten ab [HOH99, HEI03a, HEI01a]. Erste Experimente zeigen, dass in QP-Lasern aufgrund ihrer größeren Stabilität gegenüber optischer Rückkopplung der Wechsel zwischen den einzelnen Bereichen genauer nachzuvollziehen ist [CAR06a, OBR03a].

In dieser Arbeit wird ein Quantenpunktlaser mit schwacher optischer Rückkopplung von einem externen Spiegel untersucht. Dafür wird in dem einführenden Kapitel 2 das Funktionsprinzip eines Halbleiterlasers beschrieben und Ratengleichungen für die Ladungsträger- und Photonendichte hergeleitet. Dieses Ratengleichungssystem wird in dem Kapitel 4 auf den Fall optischer Rückkopplung von einem planaren Spiegel, zu dem sogenannten Lang-Kobayashi-Modell (**LK-Modell**) erweitert. In Kapitel 5 wird ein für die Beschreibung eines QP-Lasers geeignetes Ratengleichungsmodell [MAL07, MAL06] vorgestellt. Für den Fall größerer optischer Füllfaktoren Γ zeigt dieses Modul eine ähnliche Dyna-

mik, wie sie in Quantengrabenlasern gefunden wird [LUE08]. Beide Modelle werden in Kapitel 6 vereinigt, so dass ein Modell entsteht, mit dem die Effekte optischer Rückkopplung in Quantenpunktlasern beschrieben werden können. In Kapitel 7 werden analytische Näherungen für die Fixpunkte des kombinierten Modells ohne Rückkopplung gewonnen und dessen Dynamik beschrieben. Schließlich wird in Kapitel 8 auf die Fixpunkte und Dynamik des kombinierten Modells in Abhängigkeit von der Rückkopplungsstärke und Rückkopplungsphase eingegangen. Dabei wird untersucht, inwieweit die geringere Sensibilität von Quantenpunktlasern gegenüber optischer Rückkopplung durch das kombinierte Modell beschrieben werden kann.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Halbleitermaterialien

Am absoluten Nullpunkt der Temperatur $T = 0\text{ K}$ weisen Halbleiter und Isolatoren ein vollständig aufgefülltes Valenzband und ein leeres Leitungsband getrennt durch eine Bandlücke auf. Metalle zeichnen sich durch ein teilweise gefülltes Leitungsband aus. Bei Halbleitern ist (im Gegensatz zu Isolatoren) die Bandlücke E_g so schmal ($E_g \lesssim 3\text{ eV}$), dass sich bei endlichen Temperaturen die Aufweichung der elektronischen Verteilungsfunktion, der sogenannten Fermi-Funktion

$$f(E, E_F, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)}$$

bemerkbar macht. Dabei bezeichnet E die Energie, k_B die Boltzmannkonstante, T die absolute Temperatur und E_F die Fermi-Energie.

Die Fermi-Energie ist die Energie des energetisch höchsten besetzten Zustands am absoluten Nullpunkt der Temperatur. Bei endlichen Temperaturen bleibt ein Bruchteil der Zustände in der Nähe der Valenzbandoberkante unbesetzt und die entsprechenden Elektronen besetzen Zustände in der Nähe der Leitungsbandunterkante. Da partiell gefüllte Bänder durch Anhebung der Elektronen in freie Energiezustände beim Anlegen einer äußeren Spannung den elektrischen Strom leiten, wird der Halbleiter bei endlichen Temperaturen leitend. Die Leitung des elektrischen Stroms durch Leitungsbandelektronen und Löcher im Valenzband wird als Eigenleitung bezeichnet.

Ein Unterschied von Halbleitern gegenüber Metallen ist, dass durch geringfügige Materialzusätze die Leitfähigkeit um viele Größenordnungen variiert werden kann (Störstellenleitung). Durch diesen als Dotierung bezeichneten Vorgang lässt sich der Elektronen- oder Löchercharakter der Leitfähigkeit bestimmen. Auf dieser Besonderheit von Halbleitern basiert deren große technische

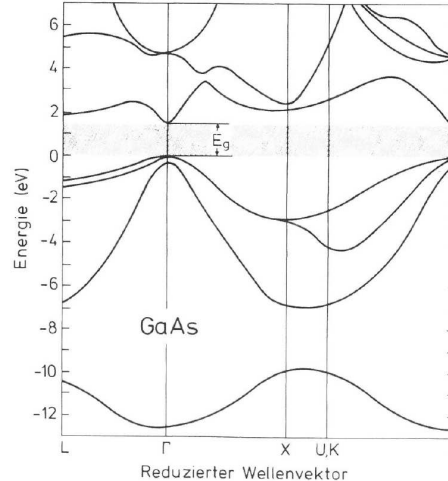


Abbildung 2.1.: Bandstruktur von GaAs nahe des Γ -Punktes. E_g bezeichnet die Bandlücke. Entnommen aus [IBA88].

Bedeutung in der Festkörperelektronik. Halbleiter, in denen der Ladungstransport überwiegend durch Leitungsbandelektronen erfolgt, werden als n -leitend bezeichnet, solche in denen die Löcherleitung überwiegt als p -leitend.

Bei Halbleitern unterscheidet man zwischen Element- (z.B. Silizium (Si), Germanium (Ge), etc.) und Verbindungshalbleitern. Letztere setzen sich aus Elementen von verschiedenen Hauptgruppen zusammen (zum Beispiel Aluminiumgalliumarsenid (AlGaAs)). Besonders interessant für photonische Bauelemente sind Halbleiter, die aus Elementen der dritten und der fünften Hauptgruppe zusammengesetzt sind (III-V-Halbleiter), da deren wichtigste Vertreter (z.B. Indiumphosphit (InP), Indiumarsenid (InAs), Galliumarsenid (GaAs), etc.) eine direkte Bandlücke aufweisen. Dies bedeutet, dass Valenzbandmaximum und Leitungsbandminimum zusammenfallen. Dies ist in Abb. 2.1 veranschaulicht. Gezeigt ist die Bandstruktur, das heißt die Bandenergie $E(k)$ aufgetragen über dem reduzierten reziproken Wellenvektor k , von GaAs. Der Γ -Punkt bezeichnet das Zentrum der Brioullinzone.

Bei der für die Photonik wichtigen strahlenden Rekombination von Leitungsbandelektronen und Löchern des Valenzbandes werden Photonen mit der Energie der Bandlücke generiert. Aufgrund der Impulserhaltung muss bei der strahlenden Rekombination eines Elektron-Loch-Paares die Differenz aus Elektron- und Lochimpuls dem Impuls $\mathbf{P} = \hbar\mathbf{K}$ des dabei generierten Photons entsprechen. Dabei ist \hbar das reduzierte Plank'sche Wirkungsquantum und \mathbf{K} der Wellenvektor des Photons. Dieser ist für die bei der strahlenden Rekombination erzeugten Photonen des infraroten oder sichtbaren Spektralbereichs vernachlässigbar klein im Vergleich zu den Wellenvektoren der Kristallelektronen. Im Banddiagramm sind daher nur fast senkrechte Übergänge möglich.

2.2. Niedrigdimensionale Halbleiterstrukturen

Kann in jeder Dimension der Kristall als unendlich ausgedehnt angenommen werden, sind in Volumenhalbleitern aufgrund der periodischen Struktur des Halbleitermaterials die erlaubten Energieniveaus in Form von quasikontinuierlichen Energiebändern separiert durch Bandlücken angeordnet. Die elektronische Energie-Zustandsdichte $D(E) = dN/dE$, das heißt, die Zahl der erlaubten Zustände dN pro Energieintervall dE steigt wurzelförmig mit der Energie an (siehe Abb. 2.2). Wird in mindestens einer Dimension die Ausdehnung des Kristalls auf die Größenordnung der de'Broglie Wellenlänge der quasifreien Kristallelektronen

$$\lambda_{\text{deB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3m^*k_B T}}$$

reduziert, treten Quantisierungseffekte auf. Dabei ist h der Plank'sche Wirkungsquantum, p der Impuls des Elektrons und m^* dessen effektive Masse. Die effektive Masse trägt der veränderten Dispersionsrelation von Kristallelektronen

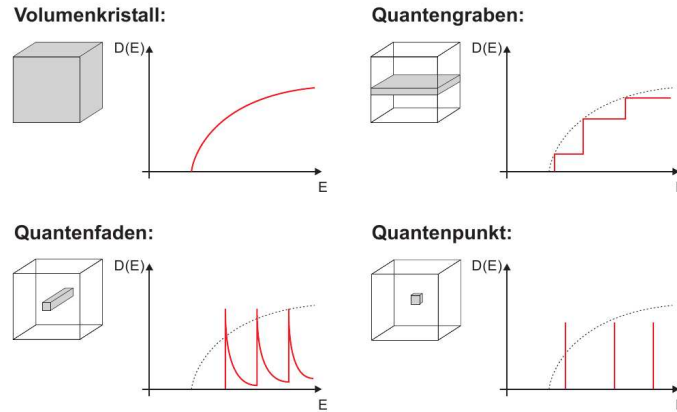


Abbildung 2.2.: Energie-Zustandsdichte $D(E) = dN/dE$ in (3D) Volumen-kristall, (2D) Quantengraben, (1D) Quantenfaden und (0D) Quantenpunkt. Entnommen aus [STU08].

nen gegenüber freien Elektronen Rechnung $E(\mathbf{k}) = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m^*$. Eine Quantisierung der Zustände erfordert Halbleiterstrukturen im Nanometer-Bereich. Dies kann zum Beispiel ein Übergang von Halbleitermaterialien mit unterschiedlich großen Bandlücken sein. An einem derartigen Heteroübergang kommt es zu einer Bandverbiegung und damit zu gebundenen Zuständen in vertikaler Richtung. Es entsteht ein sogenannter Quantengraben. In diesem bilden sich zweidimensionale parabolische Energiesubbänder in den beiden Richtungen senkrecht zu der Quantisierungsachse, in denen sich die Kristallelektronen noch quasifrei bewegen können (quasi-2-D-Elektronengas). Die Subbänder sind energetisch durch den Abstand der Energiequantelung in vertikaler Richtung getrennt. Die Energie-Zustandsdichte ist innerhalb der Subbänder konstant und steigt treppenförmig mit der Energie an. Bei Quantenfäden gibt es nur noch eine Bewegungsrichtung, in der sich die Kristallelektronen quasifrei bewegen können. Die Zustandsdichte verläuft innerhalb der eindimensionalen Subbänder wie die reziproke Wurzel mit der Energie. In Quantenpunkten sind die elektronischen Zustände in alle drei Raumrichtungen lokalisiert. Daraus resultieren eine δ -distributionsartige Energie-Zustandsdichte und diskrete Energieniveaus wie bei Atomen. Daher werden Quantenpunkte auch als künstliche Atome bezeichnet, auch wenn sie bis zu 10^4 Atome beinhalten können [BIM99].

2.2.1. Quantenpunkte

Quantenpunkte sind mesoskopische Objekte mit in allen drei Raumrichtungen lokalisierten Energie-Eigenzuständen. Es gibt mehrere Verfahren Quantenpunkte herzustellen. In dieser Arbeit werden durch selbstorganisiertes Wachstum entstandene Quantenpunkte aus Indiumarsenid (InAs) in einer Matrix aus Galliumarsenid (GaAs) betrachtet. Dieses als Stranski-Krastanov-Wachstum bekannte

Verfahren beruht auf der Energieminimierung einer Kristalloberfläche [BIM99]. Auf einen GaAs-Volumenkristall wird eine wenige Monolagen dicke Schicht aus

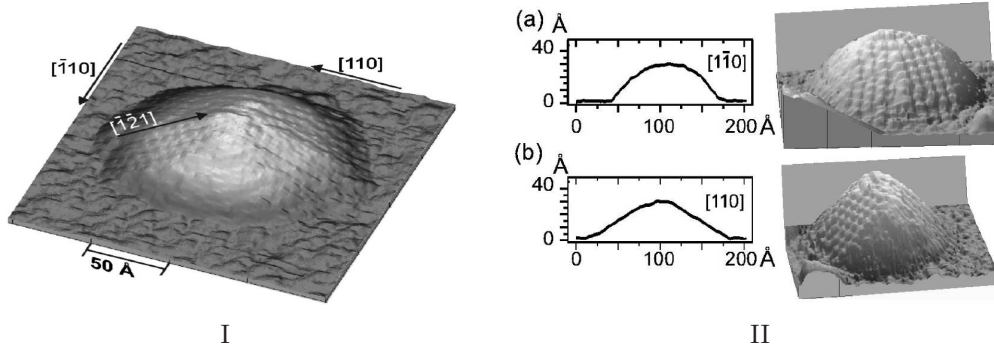


Abbildung 2.3.: Auf einer GaAs(001)-Oberfläche gewachsene InAs Quantenpunkte. I: Rastertunnelmikroskopische Aufnahme eines InAs Quantenpunktes ohne Überdeckung. II: Höhenprofil eines Quantenpunktes in $[\bar{1}\bar{1}0]$ -Richtung (a) und in $[110]$ -Richtung (b). Daneben jeweils die rastertunnelmikroskopischen Aufnahmen. Abbildungen entnommen aus [MAR01a].

InAs aufgewachsen. Da die Gitterkonstanten beider Materialsysteme verschieden sind, verspannen die Lagen. Ab einer von dem Indiumgehalt abhängigen Schichtdicke wird die Oberflächenspannung durch die Bildung InAs-haltiger Inseln minimiert. Dadurch entstehen statistisch verteilte, fast pyramidenförmige Quantenpunkte mit einer ebenfalls statistischen Größenverteilung [BIM99]. In Abb. 2.3I und Abb. 2.3II sind rastertunnelmikroskopische Aufnahmen eines InAs Quantenpunktes auf einer GaAs(001)-Oberfläche dargestellt. Der Prozess der Selbstorganisation wird gestoppt, indem die Quantenpunkte mit einer Schicht aus GaAs überwachsen werden. Dabei flachen die Quantenpunkte ab [BIM99].

2.3. Funktionsprinzip eines Halbleiterlasers

Eine Halbleiter-Laserdiode ist im einfachsten Fall ein pn -Übergang. Hierbei handelt es sich um einen Halbleiterkristall, der auf der einen Seite mit Donatoren (p -Dotierung) und auf der anderen Seite mit Akzeptoren (n -Dotierung) dotiert ist. Im thermischen Gleichgewicht haben beide Kristallhälften das gleiche elektrochemischen Potential, das sogenannte Fermi-Niveau E_F . Aufgrund der unterschiedlichen Dotierung der beiden Kristallhälften sind die Lagen ihrer Energiebänder relativ zu dem Fermi-Niveau unterschiedlich. Die Valenzbandoberkante E_V^p des p -dotierten Bereichs liegt dichter an dem Fermi-Niveau als die Valenzbandoberkante E_V^n des n -dotierten Bereichs. Die Abstände der Leitungsbandunterkanten E_L^p und E_L^n des p - und des n -dotierten Bereichs zu E_F verhalten sich entgegengesetzt. In der Übergangszone zwischen den beiden Bereichen kommt es daher zu einer Bandverbiegung. In der semiklassischen Theorie wird

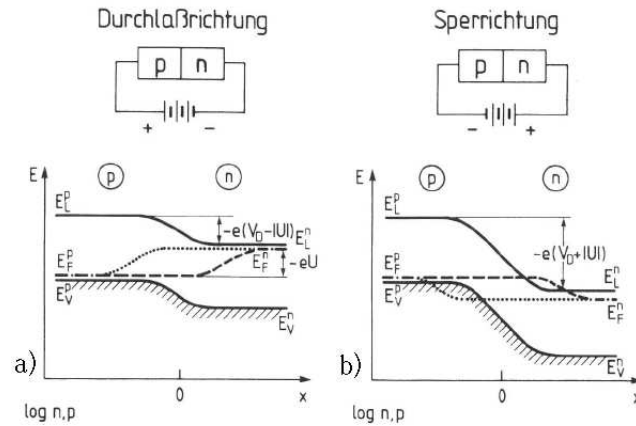


Abbildung 2.4.: Schema eines pn -Übergangs im Nichtgleichgewicht; (a) Polung in Durchlassrichtung; (b) Polung in Sperrichtung. Gezeigt ist das Bänderschema bei Anlegen einer äußeren Spannung $-U$ in (a) bzw. $+U$ in (b). Im Bereich des pn -Übergangs spaltet das Fermi-Niveau des Gleichgewichts in Quasi-Fermi-Niveaus für Elektronen E_F^n (gepunktete Linie) und Löcher E_F^p (gestrichelte Linie) auf. Nach [IBA88].

diese durch ein ortsabhängiges Makropotential $V(x)$ beschrieben. Dabei ist x eine Achse senkrecht zu der Schichtstruktur. Die Bandverbiegung kann man sich wie folgt entstanden denken: Liegt wie bei Raumtemperatur und nicht zu hoher Dotierung üblich das Fermi-Niveau zwischen den Störstellenniveaus und der Mitte des verbotenen Bandes (Störstellenerschöpfung), so werden um den Dotierungssprung raumfeste Donator- und Akzeptorstörstellen nicht mehr mit Elektronen des Leitungsbandes im n -dotierten beziehungsweise mit Löchern des Valenzbandes im p -dotierten Bereich kompensiert. Dadurch entsteht eine Raumladungszone, genauer eine geladene Doppelschicht (negativ im p -dotierten und positiv im n -dotierten Bereich) zu beiden Seiten des Dotierungssprunges. Nach der Poisson-Gleichung führen diese zu einer Krümmung des Makropotentials $V(x)$, die einer Bandverbiegung um $-eV(x)$ entspricht. Dabei ist e die Elementarladung. Die Maximaldifferenz des Makropotentials V_D wird als Diffusionsspannung bezeichnet. Nach dem Massenwirkungsgesetz gilt $-eV_D = E_V^n - E_V^p$. Das thermische Gleichgewicht ist ein dynamisches Gleichgewicht. Die durch das elektrische Feld, das durch die Krümmung des Makropotentials hervorgerufen wird, bewirkten Feldströme gleichen sich mit den Diffusionsströmen, die durch die Konzentrationsprofile der Ladungsträger in der Raumladungszone hervorgerufen werden, aus.

Eine extern angelegte Spannung treibt das System aus dem Gleichgewicht. Ist sie zeitlich konstant, können die Verhältnisse im pn -Übergang als stationärer Zustand nahe dem thermischen Gleichgewicht beschrieben werden. In Durchlassrichtung wird die Energiebarriere $-eV_D$ um den Betrag der angelegten Spannung verringert (siehe Abb. 2.4a). Dadurch wird der Elektronenstrom von dem n -dotierten in den p -dotierten Bereich und der Löcherstrom von dem p -dotierten in

den n -dotierten Bereich exponentiell erhöht. Die entgegengesetzten Ströme bleiben annähernd konstant, was zu einem Nettostromfluss durch den pn -Übergang führt. In Sperrichtung wird die Energiebarriere um den Betrag der angelegten Spannung erhöht (siehe Abb. 2.4b). Es kommt zu einer Zeitskalentrennung zwischen den schnellen (\sim ps) Elektron-Elektron und Loch-Loch-Streuprozessen innerhalb der Bänder und der langsamen (\sim ns) Ladungsträgerrekombination über die Bandlücke hinweg. Da die Streuprozesse innerhalb der Bänder schnell gegenüber der Diffusion der injizierten Ladungsträger sind, befindet sich jedes Ensemble (Elektronen, Löcher) für sich im thermischen Gleichgewicht. Innerhalb der Bänder können die Ladungsträgerverteilungen deshalb wieder über Fermi-Verteilungen beschrieben werden, jedoch mit nicht mehr identischen Quasi-Fermi-Niveaus E_F^n und E_F^p für Elektronen und Löcher. Die Differenz beider Niveaus $E_F^n - E_F^p = -eU$ entspricht der angelegten Spannung U multipliziert mit der Elementarladung e . Die Verteilungsfunktion für die Leitungsbandelektronen lautet nun

$$f(E, E_F^n, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F^n}{k_B T}\right)}$$

und für die Verteilungsfunktion der Löcher in dem Valenzband gilt

$$1 - f(E, E_F^p, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_F^p - E}{k_B T}\right)}.$$

Für den Laserbetrieb ist strahlende Rekombination von Elektron-Loch-Paaren in der Grenzschicht des pn -Übergangs entscheidend. Deshalb wird diese häufig als aktive Zone oder aktive Schicht bezeichnet. Damit die strahlende Rekombination von Elektron-Loch-Paaren in dem Übergangsbereich die Absorption von Photonen überwiegt, muss eine Ladungsträgerinversion erreicht werden. Das heißt, die Elektronendichte des Valenzbandes muss größer sein als die des Leitungsbandes. Diese Laserbedingung ist erreicht, wenn die Differenz der Quasi-Fermi-Niveaus größer ist als die Bandlücke E_g [PET88]

$$E_F^n - E_F^p > E_g. \quad (2.1)$$

Bei einem homogenen pn -Übergang, bei dem die n -dotierte und die p -dotierte Seite aus dem gleichen Material bestehen, ist dies nur für in die Entartung dotierte Materialien möglich. Bei diesen liegt im thermischen Gleichgewicht das Fermi-Niveau innerhalb des Valenzbands des p -dotierten Bereichs und innerhalb des Leitungsbands des n -dotierten Bereichs (siehe Abb. 2.5 a) und b)). Mit derartigen Homostrukturen wird erst bei hohen Stromdichten die Besetzungsinversion erreicht. Die damit verbundene Joule'sche Wärme begrenzt die Lebensdauer von Homostrukturen. Daher wurden Halbleiter-Laserdioden erst mit der Erfindung des Doppelheterostrukturlasers im industriellen Maßstab einsetzbar. In diesen Strukturen ist zwischen den p - und n -dotierten Gebieten (pn -Übergang)

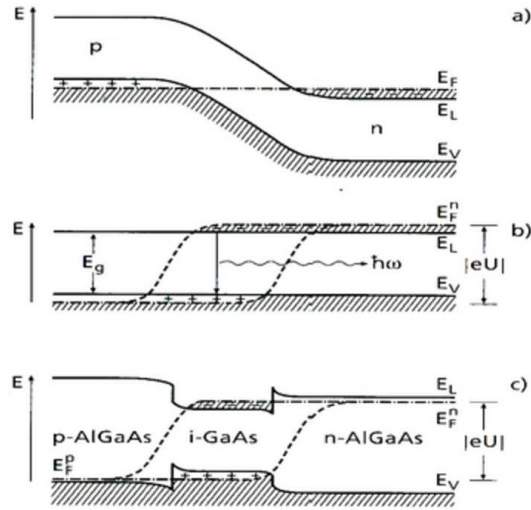


Abbildung 2.5.: Elektronische Bänderschemata $E(x)$ von pn -Halbleiter-Laserstrukturen längs einer Achse senkrecht zur Schichtstruktur: **a)** In die Entartung dotierter pn -Übergang im thermischen Gleichgewicht; **b)** gleicher Übergang mit maximaler Vorspannung U in Flussrichtung; **c)** Doppelheterostruktur-Übergang mit maximaler Vorspannung U in Flussrichtung. $E_F^{n,p}$ bezeichnen die Quasi-Ferminiveaus, E_L , E_V Leitungs- bzw. Valenzbandkanten. Abbildung entnommen aus [IBA88].

mit größerer Bandlücke eine schwach dotierte oder intrinsische Schicht aus Halbleitermaterial mit einer kleineren Bandlücke eingebettet. Diese dient als aktive Schicht des pn -Übergangs. Bei Polung in Flussrichtung liegen die Quasi-Ferminiveaus in der aktiven Schicht innerhalb des Leitungs- bzw. Valenzbandes und gewährleisten damit die Bedingung für die Besetzungsinversion (2.1) (siehe Abb. 2.5 c)). Die aktive Schicht wird mit Elektronen und Löchern geflutet, die wegen der Banddiskontinuitäten im Leitungs- und Valenzband „eingeschlossen“ sind. Dies führt zu höheren Ladungsträgerdichten und damit zu einer erhöhten strahlenden Rekombination. Im Idealfall hat das Material der aktiven Schicht einen geringeren Brechungsindex als das umliegende Material, so dass das durch induzierte Emission erzeugte Licht an den Grenzflächen der aktiven Schicht totalreflektiert wird und so ein Wellenleiter entsteht.

2.4. Der optische Füllfaktor Γ

Der optische Füllfaktor Γ beschreibt das Verhältnis der Lichtintensität in der aktiven Schicht zu der Lichtintensität in der gesamten Kavität

$$\Gamma = \frac{\int_{V_{\text{akt}}} |E(\mathbf{r})|^2 d^3r}{\int_V |E(\mathbf{r})|^2 d^3r}. \quad (2.2)$$

Dabei ist $E(\mathbf{r})$ das elektrische Feld innerhalb der Kavität, V_{akt} das Volumen der aktiven Schicht und V das Volumen der Laserkavität. Je größer der optische Füllfaktor ist, desto mehr Wechselwirkungen zwischen den Ladungsträgern und dem elektrischen Feld durch induzierte Absorption und Emission sind zu erwarten. Der optische Füllfaktor hat also die Bedeutung einer Kopplungsstärke zwischen dem elektrischen Feld in der Laserkavität und der Ladungsträgerinversion. In Kapitel 7 wird analysiert, wie der optische Füllfaktor das Einschwingverhalten der Laserdiode in den Gleichgewichtszustand beeinflusst. In einfachen Ratengleichungsmodellen wie dem in Kapitel 3 beschriebenen, wird angenommen, dass die Intensitätsverteilung des elektrischen Feldes in der Kavität gleichmäßig ist, während die Ladungsträgerinversion auf die aktive Schicht beschränkt ist. In dieser Näherung ergibt sich der optische Füllfaktor aus dem Verhältnis der Volumina der aktiven Schicht V_{akt} und der Kavität V

$$\Gamma = \frac{V_{\text{akt}}}{V}.$$

Quantenpunktlaser haben geringere optische Füllfaktoren als Quantengrubenlaser gleicher Schichtstruktur. Bei Letzteren erstreckt sich die aktive Zone über eine gesamte Schicht orthogonal zu der Lichtemission. Sie haben deshalb nur einen vertikalen Füllfaktor Γ_z , der den vertikalen Überlapp der optischen Mode mit der elektronisch aktiven Schicht beschreibt. Bei Quantenpunktlasern füllen die Quantenpunkte die aktive Schicht nicht komplett aus, so dass noch eine Komponente des Füllfaktors in dieser Ebene $\Gamma_{xy} = N^{QD}\gamma_{xy}$ hinzukommt. Dabei ist N^{QD} die Quantenpunktdichte und γ_{xy} die durchschnittliche Grundfläche eines Quantenpunktes in der aktiven Schicht. Bei mehreren übereinanderliegenden Quantenpunktschichten nimmt der optische Füllfaktor nahezu linear mit der Anzahl der Schichten a_L zu [BIM99]

$$\Gamma = a_L N^{QD} \gamma_{xy} \Gamma_z. \quad (2.3)$$

Um die optische Verstärkung, auch modaler Gewinn genannt, zu erhöhen, werden bei Quantenpunktlasern mehrere Schichten mit Quantenpunkten übereinandergewachsen. Die aktive Schicht, der in dieser Arbeit betrachteten Laserstruktur, besteht aus 15 Lagen mit Quantenpunkten, die voneinander mit dünnen GaAs-Schichten getrennt sind (siehe Kapitel 5.1).

2.5. Brechung und Reflexion elektromagnetischer Wellen

Die Brechung und Transmission elektromagnetischer Wellen an einer ebenen Grenzfläche zweier dielektrischer Medien wird für beliebige Einfallswinkel durch die *fresnelschen Formeln* beschrieben [JAC98a]. Hier betrachten wir nur den einfachsten Fall einer sich in z -Richtung ausbreitenden linear polarisierten ebenen

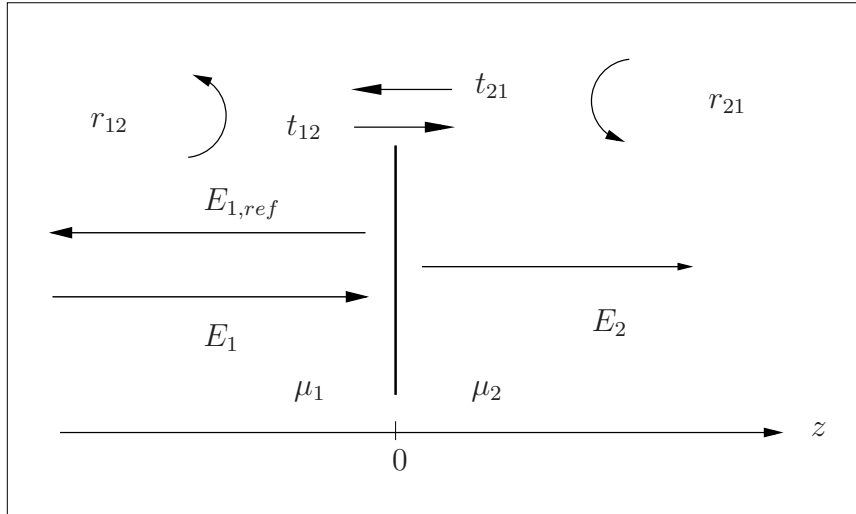


Abbildung 2.6.: Skizze zur Veranschaulichung der im Text benutzten Bezeichnungen. Eine von links einfallende Welle mit der komplexen Amplitude E_1 trifft auf eine Grenzfläche bei $z = 0$. Die Amplitude der reflektierten Welle ist $E_{1,ref}$, die der transmittierten Welle E_2

Welle mit der komplexen Amplitude E_1 . Diese breitet sich in einem Medium mit komplexen Brechungsindex μ_1 aus. Bei $z = 0$ trifft sie senkrecht auf die Grenzfläche mit einem Medium, das den Brechungsindex μ_2 hat. Die Amplitude der reflektierten Welle wird mit $E_{1,ref}$ und die der transmittierten Welle mit E_2 bezeichnet (siehe Abb. 2.5). Der Reflexionskoeffizient r_{12} ist definiert als der Quotient aus reflektierter und einfallender Feldamplitude

$$r_{12} = \frac{E_{1,ref}}{E_1} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}. \quad (2.4)$$

Der Transmissionskoeffizient t_{12} ist gegeben als der Quotient aus transmittierter und einfallender Feldamplitude

$$t_{12} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Das Reflexionsvermögen R einer Grenzfläche beschreibt das Verhältnis der Intensitäten von einfallender und reflektierter Welle. Da die Intensität proportional zu dem Betragsquadrat der Feldamplitude ist, ergibt sich das Reflexionsvermögen der Grenzfläche zu

$$R = r_{12} r_{12}^* = \left| \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \right|^2.$$

Hier wurde noch die komplex Konjugierte des Reflexionskoeffizienten r_{12}^* eingeführt. Im Allgemeinen sind die Brechungsindizes $\mu = \mu' + i\mu''$ komplex, mit dem Realteil μ' und dem Imaginärteil μ'' . Der Imaginärteil beschreibt die Absorption

der Welle im Medium und ist über $\mu'' = \kappa_{abs}c/2\omega = \kappa_{abs}\lambda_0/4\pi$ mit dem Extinktionskoeffizienten κ_{abs} verknüpft. Dabei ist ω die Frequenz der Welle und λ_0 ihre Wellenlänge im Vakuum. In dem betrachteten GaAs-Materialsystem kann bei Wellenlängen im Mikrometer-Bereich jedoch μ'' vernachlässigt werden. Im Folgenden sei angenommen, dass $\mu'_1 > \mu'_2$ gilt. Dann kann der Reflexionskoeffizient r_{12} für die Reflexion am optisch dünneren Medium einfach durch $r_{12} = \sqrt{R}$ beschrieben werden. Bei der Reflexion am optisch dichteren Medium muss noch beachtet werden, dass ein Phasensprung um π erfolgt. Es gilt also, wie aus (2.4) ersichtlich, $r_{21} = -\sqrt{R}$. Abschließend sei noch erwähnt, dass für Medien mit reellem Brechungsindex (transparente Medien) die Relation

$$t_{12}t_{21} = 1 - R$$

gilt.

2.6. Näherung der langsam veränderlichen Amplitude

Eine wichtige Näherung für die Beschreibung der elektrischen Feldkonfiguration in der Laserkavität ist die Näherung der langsam veränderlichen Amplitude.

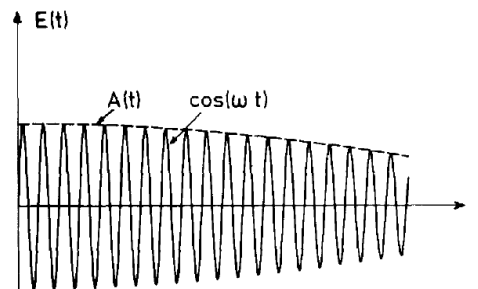


Abbildung 2.7.: Veranschaulichung der Näherung der langsam veränderlichen Amplitude. Die elektrische Feldstärke $E(t)$ wird in eine langsam veränderliche Amplitude $A(t)$ und eine schnell veränderliche Trägerwelle $\cos(\omega t)$ zerlegt. Nach [HAK85].

Bei dieser wird angenommen, dass sich die zeitabhängige elektrische Feldstärke $E(t)$ in eine schnelle Trägerwelle $e^{-i\omega t}$ und eine im Vergleich dazu langsam veränderliche Amplitudenfunktion $A(t)$ zerlegen lässt

$$E(t) = A(t)e^{-i\omega t} + k.k..$$

Dabei ist ω die Kreisfrequenz des Lasers, und *k.k.* steht für den komplex konjugierten Teil der Welle. In dieser Näherung vereinfacht sich die zeitliche Ableitung der Feldstärke $E(t)$ zu

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t) = \left(-i\omega A + \frac{\partial A}{\partial t}\right)e^{-i\omega t} \approx -i\omega A e^{-i\omega t} = -i\omega E(t),$$

wobei die Näherung $|\frac{\partial A}{\partial t}| \ll |\omega A|$ gemacht wurde. In dieser Näherung kommen in der Wellengleichung für das elektrische Feld in dem Resonator nur noch erste zeitliche Ableitungen vor.

3. Ratengleichungsmodell für Halbleiterlaser

3.1. Herleitung der Ratengleichung des elektrischen Feldes

In diesem Abschnitt wird eine Wellengleichung für das elektrische Feld \mathbf{E} innerhalb der Laserdiode, aus den Maxwellgleichungen für dielektrische, nichtmagnetische Materie hergeleitet.

3.1.1. Elektromagnetische Wellen in dielektrischer Materie

Die Wirkung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} auf Probeladung ist durch die beiden homogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.1b)$$

gegeben. Die beiden inhomogenen Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{j} \quad (3.2b)$$

beschreiben die Erzeugung der Felder \mathbf{D} und \mathbf{H} durch gegebene Ladungen und Ströme. Dabei ist \mathbf{B} die magnetische Induktion, \mathbf{H} das magnetische Feld, \mathbf{D} die dielektrische Verschiebung, ρ die Volumendichte freier Ladungsträger und \mathbf{j} die freie Flächenstromdichte. Partielle zeitliche Ableitungen sind mit Punkten gekennzeichnet. Die Zusammenhänge zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} sowie \mathbf{H} und \mathbf{B} sind über

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (3.3)$$

gegeben. Dabei ist \mathbf{P} die makroskopische elektrische Polarisation, \mathbf{M} die Magnetisierungstromdichte, ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums und μ_0 die Permeabilität des Vakuums. Das Gleichungssystem (3.1), (3.2) und (3.3) ist nicht vollständig. In zwei Materialgleichungen muss noch der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld \mathbf{E} und der von ihm induzierten Polarisation \mathbf{P}

sowie zwischen dem magnetischen Feld \mathbf{H} und der Magnetisierung \mathbf{M} hergestellt werden. Die Antwort der Materie auf die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} kann bei nicht zu großen Feldstärken als linear angenommen werden (lineare Antworttheorie). Der Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischem Feld wird durch die elektrische Suszeptibilität χ_e beschrieben, der Zusammenhang zwischen Magnetisierung und magnetischem Feld durch die magnetische Suszeptibilität χ_m . Im Allgemeinen sind diese Zusammenhänge nichtlokal und nichtsynchron. Das heißt, die Suszeptibilitäten sind sowohl orts- als auch zeitabhängig. Polarisation und Magnetisierung sind dann durch Faltung der Suszeptibilitäten mit den Feldern gegeben. So gilt für die Polarisation

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 (\chi_e * \mathbf{E})(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} d^3 r' dt' \chi_e(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (3.4)$$

Dabei ist die Faltung mit $*$ gekennzeichnet und die Matrixmultiplikation mit einem Punkt. Da Kausalität gefordert wird, ist die elektronische Suszeptibilität für Zeiten $t' < t$ gleich Null. Ein analoger Zusammenhang gilt für \mathbf{M} und \mathbf{H} . Da Polarisation und Magnetisierung von der Raumrichtung abhängig sein können, sind χ_e und χ_m im Allgemeinen Tensoren zweiter Ordnung. Wir betrachten hier jedoch nur den einfachsten Fall eines homogenen, isotropen Mediums, in dem die Suszeptibilitäten skalar sind [JAC98a]. Da die Fouriertransformierte der Faltung zweier Funktionen das Produkt der Fouriertransformierten dieser Funktionen ist, gilt für die Fouriertransformierte der Polarisation

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}_e(\mathbf{k}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.5)$$

Dabei ist mit \mathbf{k} der Wellenvektor und mit ω die Kreisfrequenz der Polarisation bezeichnet. Die Fouriertransformierte einer ortsabhängigen Funktion $F(\mathbf{r})$ ist wie in der Physik üblich über

$$\hat{f}(\mathbf{k}) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

definiert. Da der zugrundeliegende Funktionenraum so gewählt wird, dass die Fouriertransformation auf diesem eine Bijektion ist, entspricht die Fourierrücktransformierte wieder der Funktion selber

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Die Fouriertransformation einer zeitabhängigen Funktion $g(t)$ ist hingegen über

$$\hat{g}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} dt g(t) e^{i\omega t}$$

definiert. Damit ergibt sich die Rücktransformierte zu

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\omega \hat{g}(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Mit diesen Definitionen kann das elektrische Feld als Superposition ebener Wellen $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ dargestellt werden

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{\mathbb{R}} d\omega \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.$$

Der Zusammenhang zwischen dielektrischer Verschiebung und dem elektrischen Feld im (\mathbf{k}, ω) -Raum wird durch Fouriertransformation von (3.3) erhalten:

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 (1 + \hat{\chi}_e(\mathbf{k}, \omega)) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) =: \epsilon_0 \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega).$$

Dabei wurde in der letzten Gleichung die dielektrische Funktion der Materie $\hat{\epsilon} = (1 + \hat{\chi}_e)$ eingeführt. Ebenso erhält man für den Zusammenhang zwischen der magnetischen Induktion und dem magnetischen Feld im (\mathbf{k}, ω) -Raum:

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = \mu_0 (1 + \hat{\chi}_m(\mathbf{k}, \omega)) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) =: \mu_0 \hat{\mu} \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega).$$

Dabei wurde die relative magnetische Permeabilität $\hat{\mu} = (1 + \hat{\chi}_m)$ eingeführt. Die magnetische Permeabilität kann für die betrachteten Halbleitermaterialien in guter Näherung gleich Eins gesetzt werden, da diese nichtmagnetisch sind. Daher wird im Folgenden $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = \mu_0 \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega)$ gesetzt. Für die Herleitung der Wellengleichung wenden wir die Rotation auf das Induktionsgesetz (3.1a) an und benutzen das Ampèresche Durchflutungsgesetz (3.2b). Dies liefert

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0 (\dot{\mathbf{j}} + \ddot{\mathbf{D}}). \quad (3.6)$$

Nehmen wir weiterhin an, dass in dem betrachteten Halbleitermaterial das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

gilt, folgt aus Gleichung (3.6)

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \ddot{\mathbf{P}} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}). \quad (3.7)$$

Dabei bezeichnet σ die differentielle Leitfähigkeit und es wurde die Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ eingeführt. Die Gleichung (3.7) kann noch durch die Annahme transversaler Felder ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) vereinfacht werden. Sind keine freien Ladungsträger vorhanden ($\rho = 0$), folgt aus den Gleichungen (3.2a) und (3.3)

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

Da in Halbleitermaterialien der die Polarisationsladungsdichte beschreibende Term $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ vernachlässigbar ist [AGR93], ist die Annahme eines transversalen elektrischen Feldes gerechtfertigt. Die resultierende Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \ddot{\mathbf{P}} \quad (3.8)$$

für ein makroskopisches elektrisches Feld, dessen Dämpfung mit der Leitfähigkeit σ des Materials ansteigt, ist der Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen. Im Rahmen der hier betrachteten *semiklassischen Lasertheorie* werden die makroskopischen Felder klassisch, die Materie jedoch quantenmechanisch beschrieben. Das elektrische Feld induziert elektrische Dipolmomente, beschrieben durch quantenmechanische Dipoloperatoren \mathbf{p}_i in der Materie. Anschaulich betrachtet wird dabei ein Valenzbandelektron durch das elektrische Feld in das Leitungsband angeregt. Das entstehende Elektron-Loch-Paar bildet ein mikroskopisches Dipolmoment. Die makroskopische Polarisierung ergibt sich durch statistische Summation über ein Ensemble dieser Dipole

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \text{Tr} \{ \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{p} \}. \quad (3.9)$$

Dabei ist ρ die Dichtematrix des Systems und die Spurbildung (Tr) erfolgt über alle Energie-Eigenzustände [CHO94]. Die Lösung der Wellengleichung (3.8) beinhaltet also folgende Selbstkonsistenzprozedur: Statistische Mittelung der durch das elektrische Feld induzierten Dipolmomente $\langle \mathbf{p}_i \rangle$ liefert die makroskopische Polarisierung. Diese stellt den Quellterm der Wellengleichung (3.8) dar. Wenn deren Lösung \mathbf{E}' mit dem ursprünglichen Feld \mathbf{E} übereinstimmt, wird die Wechselwirkung von Licht und Materie konsistent beschrieben. Diese Prozedur ist in Abb. 3.1 veranschaulicht. Die semiklassische Betrachtungsweise beinhaltet

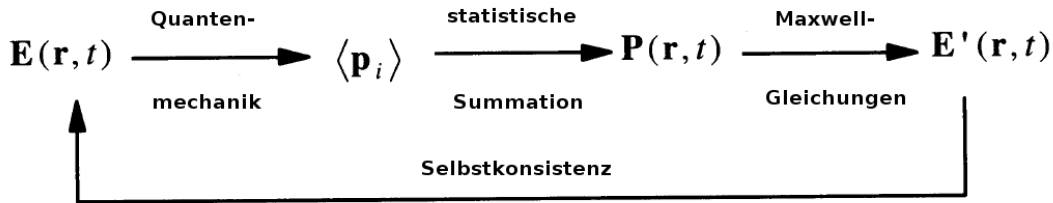


Abbildung 3.1.: Selbstkonsistenzprozedur der semiklassischen Theorie zur Lösung der Wellengleichung (3.8).

noch nicht den Effekt der spontanen Emission, der erst aus der Quantisierung der Felder hergeleitet werden kann [HAK85]. Die spontane Emission würde einen zusätzlichen Quellterm auf der rechten Seite von (3.8) ergeben. Da die spontane Emission die Ursache für wichtige Eigenschaften des Lasers, wie zum Beispiel seine Linienbreite ist, wird ihr im Rahmen der semiklassischen Theorie durch einen statistischen Term in der Feldgleichung Rechnung getragen [HEN82]. Darauf wird in Kapitel 3.6 eingegangen.

3.1.2. Zusammenhang von Suszeptibilität und optischen Größen

In diesem Kapitel wird die optische Verstärkung des elektrischen Feldes sowie der Realteil des Brechungsindex in der aktiven Schicht mit der elektronischen

Suszeptibilität in Verbindung gebracht. Die optische Verstärkung wird im Folgenden auch als Gewinn bezeichnet. Es wird vereinfachend angenommen, dass der Zusammenhang zwischen der Polarisierung und dem elektrischen Feld lokal ist. Damit sind Suszeptibilität und dielektrische Funktion ortsunabhängig. Fouriertransformation der Wellengleichung (3.8) und Einsetzen von (3.5) liefert

$$\left\{ -\tilde{k}^2 + \frac{i\omega\sigma}{\epsilon_0 c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\chi}_e(\omega) \right\} \hat{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{k}}, \omega) = 0. \quad (3.10)$$

Diese Gleichung hat nichttriviale Lösungen, falls die Wellenzahl \tilde{k} folgende Dispersionsrelation erfüllt:

$$\tilde{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left[\underbrace{1 + \hat{\chi}_e(\omega)}_{\hat{\epsilon}(\omega)} + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right]. \quad (3.11)$$

Aufgrund von Absorption beziehungsweise Verstärkung im Halbleitermaterial ist die Wellenzahl komplex. Durch das Anlegen einer externen Spannung an die Laserdiode werden Elektron-Loch-Paare in der aktiven Schicht erzeugt und bei ausreichender Spannung eine Populationsinversion in dieser erreicht. Die Inversionsdichte, das heißt die Differenz aus Elektronen- und Löcherzahldichte, wird im Folgenden mit n bezeichnet. Um Änderungen der Suszeptibilität durch die Anwesenheit von Ladungsträgern in der aktiven Schicht zu beschreiben, wird diese in zwei Anteile aufgespalten

$$\hat{\chi}_e(\omega, n) = \hat{\chi}_{bg}(\omega) + \hat{\chi}_p(\omega, n).$$

Dabei ist $\hat{\chi}_{bg}$ die Suszeptibilität der ungepumpten aktiven Schicht, also der aktiven Schicht ohne anliegende äußere Spannung. Änderungen der Suszeptibilität durch freie Ladungsträger werden durch $\hat{\chi}_p$ beschrieben. Die Dispersionsrelation (3.11) nimmt damit die Gestalt

$$\tilde{k}^2 = k_0^2 \left[\underbrace{(1 + \hat{\chi}'_{bg})}_{\hat{\epsilon}_{bg}} + \hat{\chi}'_p + i \left(\hat{\chi}''_{bg} + \hat{\chi}''_p + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) \right] \quad (3.12)$$

an. Hierbei wurde der Wellenvektor des Vakuums $k_0 = \omega/c$ eingeführt und $\hat{\epsilon}_{bg} = 1 + \hat{\chi}'_{bg}$ beschreibt die dielektrische Funktion des ungepumpten Materials. Realteile sind mit $'$ und Imaginärteile mit $''$ gekennzeichnet. Der komplexe Wellenvektor \tilde{k} kann auch durch die optische Größe des komplexen Brechungsindex $\mu = \mu' + i\mu''$ beschrieben werden

$$\tilde{k}^2 = k_0^2 (\mu' + i\mu'')^2. \quad (3.13)$$

Das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zu der Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle in dem Medium ist durch den Realteil

des komplexen Brechungsindex μ' gegeben. Absorption beziehungsweise Verstärkung der Welle im Medium werden durch seinen Imaginärteil μ'' beschrieben. Dieser wird häufig durch die auf die Intensität $I \propto |\mathbf{E}|^2$ bezogene Absorptionskonstante κ_{abs} ausgedrückt. Sie wird in Einheiten von Eins pro Länge angegeben. Die Intensität fällt beim Eindringen in das Medium exponentiell mit der Eindringtiefe d ab

$$I \propto I_0 e^{-\kappa_{abs} d}.$$

Die Ausgangsintensität ist mit I_0 bezeichnet. Zwischen dem Imaginärteil des Brechungsindex und der Absorptionskonstante besteht der Zusammenhang

$$\mu'' = \frac{\kappa_{abs}}{2k_0}.$$

Die denkbar einfachste Lösung der Wellengleichung (3.8), eine sich in eine Raumrichtung (hier z -Richtung) ausbreitende linear polarisierte ebene Welle, nimmt mit den eingeführten Größen die Gestalt

$$E(z, t) = E_0 e^{-\frac{\kappa_{abs}}{2} z} e^{i(k_0 \mu' z - \omega t)} + k.k. \quad (3.14)$$

an. Dabei ist E_0 eine konstante komplexe Amplitude und $k.k.$ steht für den komplex konjugierten Anteil der Welle. Gleichsetzen von (3.12) und (3.13) stellt den Zusammenhang zwischen der Suszeptibilität und dem komplexen Brechungsindex her:

$$\mu'^2 - \left(\frac{\kappa_{abs}}{2k_0}\right)^2 = \hat{\epsilon}_{bg} + \hat{\chi}'_p \quad (3.15a)$$

$$\kappa_{abs} = \frac{k_0}{\mu'} \left(\hat{\chi}''_{bg} + \hat{\chi}''_p + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right). \quad (3.15b)$$

Bei den hier betrachteten Wellenlängen im Mikrometer-Bereich ($\lambda = 1,3 \mu\text{m}$) ist der Betrag von μ'' viel kleiner als der von μ'

$$|\mu''| = |\kappa_{abs}/2k_0| \ll |\mu'|.$$

Damit kann (3.15a) zu

$$\mu' = \sqrt{\hat{\epsilon}_{bg} + \hat{\chi}'_p} \quad (3.16)$$

genähert werden. Zu $\hat{\chi}'_p$ tragen mehrere Mechanismen bei. Dominierend ist die Bandlückenverkleinerung des Materials der aktiven Zone aufgrund der Präsenz freier Ladungsträger. Es gilt aber auch nach dem Erreichen der Ladungsträgerinversion stets $|\hat{\chi}'_p| \ll \hat{\epsilon}_{bg}$ [AGR93], so dass (3.16) weiter zu

$$\mu' = \underbrace{\sqrt{\hat{\epsilon}_{bg}}}_{\mu'_{bg}} + \underbrace{\frac{\hat{\chi}'_p}{2\mu'_{bg}}}_{\Delta\mu'} \quad (3.17)$$

genähert werden kann. Dabei wurde der ladungsträgerunabhängige Teil des reellen Brechungsindex μ'_{bg} und die pumpinduzierte Brechungsindexänderung $\Delta\mu'$ eingeführt. Da $\hat{\chi}'_p$ gewöhnlich negativ ist, nimmt der Realteil des reellen Brechungsindex durch das Anlegen einer Spannung ab. Die Ladungsträgerabhängigkeit des reellen Brechungsindex ist eine Besonderheit von Halbleiterlasern. In Gaslasern gilt $\Delta\mu' \approx 0$. Auch in Halbleiterlasern beträgt $\Delta\mu'$ nur ungefähr 1% von μ'_{bg} . Diese geringe Variation des Brechungsindex bewirkt aber bereits signifikante Änderungen sowohl des dynamischen Verhaltens als auch des Emissionsspektrums der Laserdiode. In Kapitel 3.5 werden wir näher darauf eingehen. Da $|\Delta\mu'| \ll |\mu'|$ gilt, kann der Absorptionskoeffizient durch

$$\kappa_{abs} = \frac{k_0}{\mu'_{bg}} \left(\hat{\chi}''_{bg} + \hat{\chi}''_p + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) \quad (3.18)$$

genähert werden. Die Absorption des nicht gepumpten Materials wird durch $\hat{\chi}''_{bg}$ beschrieben. Mit ansteigender Ladungsträgerdichte in der aktiven Zone werden die Absorptionsverluste verringert, was sich in $\hat{\chi}''_p < 0$ ausdrückt. Die Transparenz des Materials für die betrachtete Wellenlänge ist erreicht, wenn $\kappa_{abs} = 0$ gilt. Oberhalb dieser Schwelle ist κ_{abs} positiv und die elektromagnetische Welle wird während des Durchlaufens der aktiven Zone verstärkt. Deshalb ist es sinnvoll einen optischen Gewinn über

$$g_{opt} := -\frac{1}{2} \frac{k_0}{\mu'_{bg}} \left(\hat{\chi}''_{bg} + \hat{\chi}''_p \right) \quad (3.19)$$

einzuführen. Der Faktor $1/2$ kommt dadurch zu Stande, dass in dieser Arbeit der Gewinn bezüglich der Amplitude des elektrischen Feldes, der Absorptionskoeffizient hingegen bezüglich der Intensität $I \propto |E|^2$ definiert wird. Der Term $k_0\sigma/\epsilon_0\omega\mu'_{bg}$ in Gleichung (3.18) trägt Verlustmechanismen Rechnung, die dem Aufbau einer Ladungsträgerinversion in den an dem strahlenden Übergang beteiligten Energieniveaus entgegenwirken. Er beinhaltet zum einen Streuverluste an der Grenzfläche der Heterostruktur (vergleiche Abb. 3.3) und zum anderen die Rekombination freier Ladungsträger an Störstellen. Diese Beiträge sind schwierig zu berechnen und werden deshalb häufig aus dem Experiment bestimmt. Auch in dem hier betrachteten Modell werden die internen Verluste

$$\kappa_{int} := \frac{1}{2} \frac{k_0\sigma}{\epsilon_0\omega\mu'_{bg}} = 220 \text{ m}^{-1} \quad (3.20)$$

als experimentell bestimmte Größe eingeführt [KUN05c]. Nun kann der Absorptionskoeffizient als Differenz der optischen Verstärkung und der internen Verluste ausgedrückt werden

$$\kappa_{abs} = 2 \left(-g_{opt} + \kappa_{int} \right).$$

Die ebene Welle aus (3.14) nimmt damit die Gestalt

$$E(z, t) = E_0 e^{(g_{opt} - \kappa_{int})z} e^{i(k_0\mu'z - \omega t)} + k.k.$$

an.

3.1.3. Adiabatische Eliminierung der Polarisation

Das bisher betrachtete Modell besteht aus neun gekoppelten Differentialgleichungen. Drei Wellengleichungen für die Komponenten des elektrischen Feldes \mathbf{E} (siehe Gleichung (3.8)), drei für die Komponenten der makroskopischen Polarisation \mathbf{P} , die noch nicht formuliert wurden und eine für die Inversionsdichte in der aktiven Schicht n (siehe Gleichung (3.48)). Eine weitere in Halbleitermaterialien oft gerechtfertigte Vereinfachung besteht nun darin anzunehmen, dass die makroskopische Polarisation wesentlich schneller relaxiert als das elektrische Feld. Sie passt sich daher quasi-instantan dem jeweiligen Wert des elektrischen Feldes an. Damit besitzt sie auf der Zeitskala der Änderung des elektrischen Feldes keine eigenen Freiheitsgrade mehr und folgt „versklavt“ der Felddynamik. Dieser als adiabatische Eliminierung oder Versklavungsprinzip in die Literatur [HAK85, GEH03] eingegangene Mechanismus reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems um drei. In Abb. 3.2 ist das Versklavungsprinzip für eine skalare komplexe Feldamplitude $E = |E|e^{-i\phi}$, eine komplexe Polarisationsamplitude P und die Inversionsdichte n veranschaulicht. Da die Dynamik der Phase ϕ des elektrischen Feldes von der Dynamik der anderen dynamischen Variablen entkoppelt, stellt sie keinen zusätzlichen Freiheitsgrad des Systems dar (vergleiche (3.72)). Der Phasenraum des Systems ist also vierdimensional $\{|E|, n, \Re(P), \Im(P)\}$. Die zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen werden als *Maxwell-Bloch-Gleichungen* bezeichnet [WIE05]. In der Abbildung wird veranschaulicht, wie sich eine Trajektorie dem Fixpunkt stabiler Laseremission nähert. In Abb. 3.2(a) verläuft sie in allen Dimensionen des Phasenraumes. Laser, in denen sowohl die Feld- als auch die Polarisationsdynamik von Bedeutung sind, werden Klasse C Laser genannt. Laser, für die die Relaxationszeit der Polarisation klein gegenüber der Relaxationszeit des Feldes ist, werden als Klasse B Laser bezeichnet. Bei ihnen folgt die Polarisationsdynamik quasi-instantan der Felddynamik. Daher haben sie nur noch zwei dynamische Freiheitsgrade. Die Trajektorie verläuft daher in einem zweidimensionalen Unterraum des Phasenraumes (Abb. 3.2(b)). In Abb. 3.2(c) folgen sowohl die Polarisations- als auch die Ladungsträgerdynamik der des elektrischen Feldes. Daher ist die Dynamik auf einen eindimensionalen Unterraum beschränkt. Laser dieser Art werden als Klasse A Laser bezeichnet. Halbleiterlaser gehören zu den Lasern der Klasse B. Die Ladungsträgerlebensdauern liegen bei dem in dieser Arbeit betrachteten Quantenpunktlaser im ps-Bereich, während die makroskopische Polarisation bei Temperaturen über 150 K in weniger als 50 fs abklingt [BOR02]. Anschaulich wird dies verständlich, wenn man bedenkt, dass die Ladungsträgerlebensdauer durch die Rekombinationsrate der Elektron-Loch-Paare bestimmt wird. Diese durch Coulomb- und Elektron-Phonon-Streuung hervorgerufene *Interbandstreuung* ist wesentlich langsamer als die *Intrabandstreuung*, also Streuprozesse innerhalb eines Bandes. Die Intrabandstreuung bewirkt, dass die durch das Feld induzierten mikroskopischen Dipolmomente außer Phase geraten. Dadurch klingt ihr statistischer Mittelwert, die makroskopische Polarisation (vergleiche

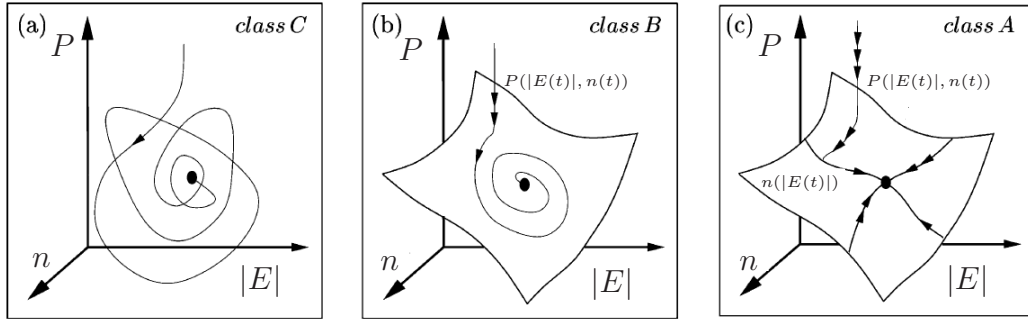


Abbildung 3.2.: Veranschaulichung der dynamischen Freiheitsgrade von Klasse A, Klasse B und Klasse C Lasern. Bezeichnungen wie im Text. Abbildung nach [WIE05].

(3.9)), ab.

Als Gleichung formuliert bedeutet dies, dass nun auch die zeitabhängige Polarisation als Produkt der elektronischen Suszeptibilität und des elektrischen Feldes ausgedrückt werden kann

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (3.21)$$

Damit vereinfacht sich die Wellengleichung (3.8) für das elektrische Feld zu

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t^2} = 0. \quad (3.22)$$

3.2. Lösung der Feldgleichung in dem Resonator

In dem Abschnitt 3.1 wurden ebene Wellen als Grundlösungen der Wellengleichung betrachtet. In diesem Abschnitt wird kurz auf realistischere Feldkonfigurationen in der Kavität eingegangen und begründet, warum der Ansatz laufender ebener Wellen eine sinnvolle Näherung zu diesen darstellt. Für eine realistischere Lösung der Wellengleichung (3.22) wird ein Separationsansatz gemacht. Bei diesem wird das elektrische Feld in einen zeitabhängigen und einen ortsabhängigen Anteil

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(t) \mathbf{E}_{pqm}(\mathbf{r})$$

aufgespalten. Die Lösungen des ortsabhängigen Teils des elektrischen Feldes werden die Moden des Resonators genannt. Um diese zu gewinnen, wird für \mathbf{E}_{pqm} noch einmal ein Separationsansatz gemacht

$$\mathbf{E}_{pqm} = \Psi(x) \Phi(y) \Upsilon(z).$$

Der Index p steht für die *lateralen* Moden (parallel zur aktiven Schicht), q steht für die *transversalen* Moden (orthogonal zur aktiven Schicht) und m markiert

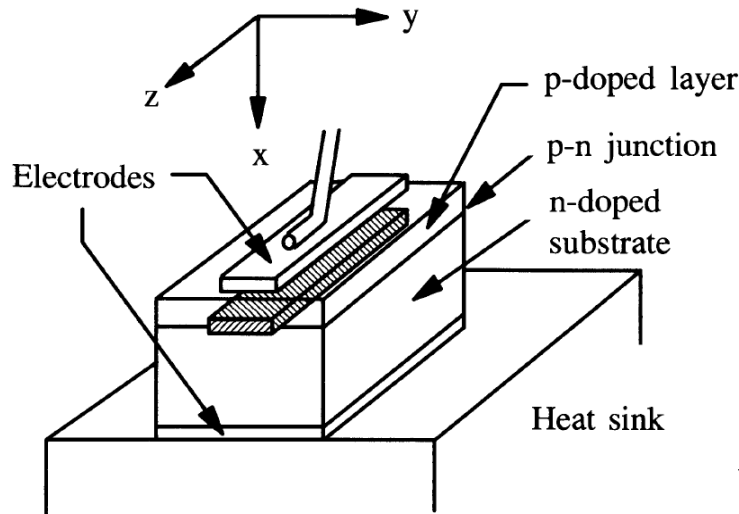


Abbildung 3.3.: Dreidimensionales Modell eines Halbleiterlasers. Eine p -dotierte Schicht ist auf ein n -dotiertes Substrat aufgetragen, so dass sich ein pn -Übergang ergibt. Die Ausbreitung der betrachteten longitudinalen Lichtmode erfolgt in z -Richtung, die der transversalen Moden in x -Richtung und die der lateralen Moden in y -Richtung. Abbildung entnommen aus [CHO94].

die *longitudinalen* Moden entlang der z -Achse (siehe Abb. 3.3). Die Anzahl der möglichen Moden sowie deren Form wird durch die Brechungsindizes beziehungsweise deren Differenzen zwischen den einzelnen Schichten der betrachteten Laserstruktur vorgegeben. Da das Laserdesign oft so gewählt wird, dass eine longitudinale Mode überwiegt, möchte ich für die Herleitung der Ratengleichung für die komplexe Amplitude des zeitabhängigen Anteiles des elektrischen Feldes nicht die dreidimensionale Wellengleichung (3.22) behandeln, sondern einen phänomenologischen Zugang wählen. Dabei wird der Laser als Fabry-Perot-Resonator betrachtet, der mit dem dielektrischen Material der aktiven Zone gefüllt ist (siehe Abb. 3.4). Das elektrische Feld wird als ebene longitudinale Welle modelliert, die an den Grenzflächen mit der umgebenden Luft bei $z = -L$ und $z = 0$ teilweise reflektiert wird. Die sich ausbildende stehende Welle, auch Fabry-Perot-Mode genannt, ist eine gute Näherung für die Feldkonfiguration im Laser [AGR93, PET88].

Der phänomenologische Zugang ermöglicht eine anschauliche Herleitung der zum Erreichen der Laserschwelle nötigen Verstärkung. Desweiteren lässt sich auf diesem Weg relativ einfach der Einfluss eines externen Spiegels, der einen Teil des Lichts in den Laser zurückkoppelt, behandeln. Nachteilig ist bei diesem Zugang, dass Näherungen, die bei der Herleitung der Ratengleichung aus der Wellengleichung (3.22) begründet werden können, phänomenologisch eingeführt werden müssen. So wird die zeitabhängige Amplitude des elektrischen Feldes später in der Näherung der langsam veränderlichen Amplitude betrachtet. Auch der opti-

sche Füllfaktor Γ , der sich aus der räumlichen Mittelung der transversalen und lateralen Feldmoden ergibt, muss phänomenologisch eingeführt werden. Schließlich wird implizit noch das Versklavungsprinzip der Polarisation angewendet. Im Folgenden wird das Feld im Resonator als linear polarisiert angenommen. Dadurch kann es durch eine komplexe skalare Amplitude beschrieben werden. Zunächst wird die Verstärkung $g_{opt,th}$, die zu dem Erreichen der Laserschwelle nötig ist, hergeleitet. Hierzu wird das elektrische Feld im Resonator als Superposition einer vorwärts und einer rückwärtspropagierenden Welle dargestellt [SCH88], [SCH90b]:

$$E(z, t) = (E_v(z) + E_r(z))e^{-i\omega t} + k.k. \quad \text{mit} \quad -L \leq z \leq 0. \quad (3.23)$$

Dabei ist $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz der Welle, die im Folgenden auch öfter als Frequenz bezeichnet wird, wenn Verwechslungen mit der Frequenz ν ausgeschlossen werden können. Um die Formeln überschaubar zu gestalten wird der komplex konjugierte Anteil von (3.23) von nun an unterdrückt. Die vorwärtspropagierende Feldkomponente wird durch

$$E_v(z) = E_v(-L)e^{i\tilde{k}(z+L)} = E_v(-L)e^{ik(z+L)}e^{(g_{opt}-\kappa_{int})(z+L)}$$

und die rückwärtspropagierende Komponente durch

$$E_r(z) = E_r(0)e^{-i\tilde{k}z} = E_r(0)e^{-ikz}e^{-(g_{opt}-\kappa_{int})z}$$

beschrieben. Hierbei wurde die reelle Wellenzahl in Materie $k = \frac{\omega}{c}\mu'$ eingeführt. Da sich der zeitabhängige Anteil der ebenen Welle $e^{-i\omega t}$ bei der Reflexion an den Facetten nicht ändert, kann entweder nur der ortsabhängige Anteil der Welle oder deren Fouriertransformierte

$$\hat{E}(z, \omega') = (E_v(z) + E_r(z))2\pi\delta_\omega(\omega')$$

betrachtet werden. Im Folgenden wird die fouriertransformierte Welle $\hat{E}(z, \omega')$ betrachtet, der Term $2\pi\delta_\omega(\omega')$ jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit unterdrückt. Die Amplitude des vorwärts- und des rückwärtspropagierenden Feldes sind über die im Allgemeinen komplexen Reflexionskoeffizienten

$$r_1 = |r_1|e^{i\phi_1} = \sqrt{R_1}e^{i\phi_1} \quad \text{und} \quad r_2 = |r_2|e^{i\phi_2} = \sqrt{R_2}e^{i\phi_2} \quad \text{mit} \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$$

wie folgt miteinander verbunden:

$$E_v(-L) = r_1 E_r(-L) \quad \text{und} \quad E_r(0) = r_2 E_v(0) \quad (3.24)$$

Damit sich eine stabile Feldkonfiguration in dem Resonator einstellt, darf sich die Phase des Feldes bei einem Umlauf nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π verändern (konstruktive Interferenz). An der Laserschwelle stellt sich eine

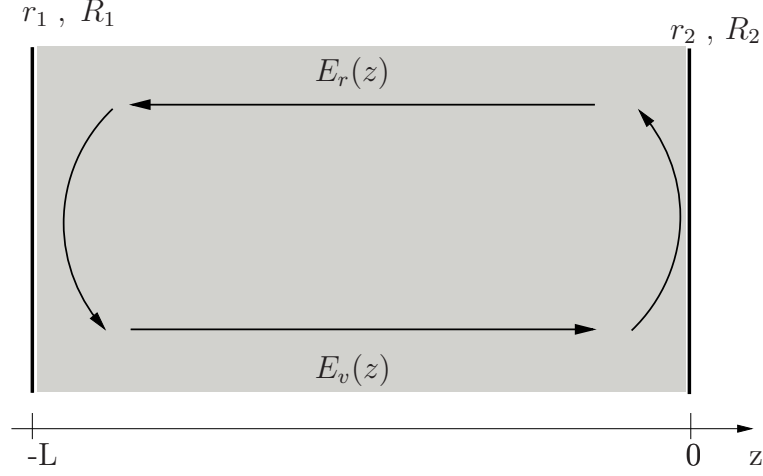


Abbildung 3.4.: Der Fabry-Perot-Resonator besteht aus einem dielektrischen Medium der Länge L . Die Grenzflächen mit der umgebenden Luft haben die Reflexionskoeffizienten r_1 bei $z = -L$ und r_2 bei $z = 0$ beziehungsweise die Reflektivitäten $R_1 = |r_1|^2$ und $R_2 = |r_2|^2$. Das Feld im Resonator wird durch die Überlagerung einer vorwärts propagierenden $E_v(z)$ und einer rückwärts propagierenden, ebenen Welle $E_r(z)$ gebildet. Bei nicht verspiegelten Facetten gilt für *GaAs* $R_1 = R_2 = 0.32$.

stabile Feldkonfiguration ein, in der die internen- und die Spiegelverluste genau durch die optische Verstärkung ausgeglichen werden. Unter Benutzung der Randbedingungen (3.24) folgt

$$\begin{aligned} E_v(-L) &= r_1 E_r(-L) = r_1 E_r(0) e^{ikL} e^{(g_{opt} - \kappa_{int})L} \\ &= r_1 r_2 E_v(-L) e^{i2kL} e^{2L(g_{opt} - \kappa_{int})} \\ \Leftrightarrow 1 &= r_1 r_2 e^{2ikL} e^{2L(g_{opt} - \kappa_{int})}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Der Betrag der obigen Gleichung liefert die Bedingung für die optische Verstärkung an der Laserschwelle

$$g_{opt,th} = \kappa_{int} + \frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{|r_1||r_2|}\right) = \kappa_{int} + \frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}\right) \quad (3.26a)$$

$$= \kappa_{int} + \frac{1}{4L} \ln\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right). \quad (3.26b)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite von (3.26b) drückt die Verluste an den Facetten, die *Spiegelverluste* genannt werden, aus. Die tatsächlich zu dem Erreichen der Laserschwelle nötige optische Verstärkung ist etwas geringer als die hier errechnete, da die spontane Emission in die betrachtete Mode noch nicht beachtet wurde. Diese trägt ebenfalls zu der Verstärkung der Mode bei. Die möglichen Resonanzfrequenzen der Kavität ergeben sich aus dem Vergleich der Phasen beider Seiten von (3.25)

$$2kL + \phi_1 + \phi_2 = m2\pi \quad \text{mit:} \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.27)$$

In Halbleitermaterialien ist gewöhnlich der Imaginärteil des Brechungsindex viel kleiner als der Realteil und kann in guter Näherung vernachlässigt werden. Da die Reflexionen zusätzlich an einer Grenzschicht mit der optisch dünneren Luft erfolgen (kein Phasensprung), können die beiden Phasen ϕ_1 und ϕ_2 gleich Null gesetzt werden. Es ergibt sich aus (3.27) mit $\kappa = \frac{\omega}{c}\mu'$ folgende Bedingung für die Resonanzfrequenzen

$$\mu'(\omega_m, n)\omega_m = m \frac{\pi c}{L} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.28)$$

Für die Resonanzfrequenzen an der Laserschwelle gilt somit

$$\omega_{m,th} = m \frac{\pi c}{\mu'_{m,th} L} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.29)$$

Hierbei bezeichnet $\mu'_{m,th} = \mu'(\omega_{m,th})$ den Realteil des Brechungsindex für die Frequenz $\omega_{m,th}$ der m -ten longitudinalen Mode an der Laserschwelle. Bei der Wahl der tatsächlich oszillierenden Mode spielen nicht nur die Resonatorresonanzen (3.29) eine Rolle, sondern auch das Verstärkungsprofil der Laserstruktur. Es wird sich ein Kompromiss aus der für die Verstärkung idealen Frequenz und der benachbarten Resonanzfrequenz bilden. Dadurch kann die Schwellwertfrequenz des Lasers auch ohne Rückkopplung geringfügig von den Werten $\Delta\omega_{m,th} = m \frac{\pi c}{\mu'_{th} L}$ abweichen [LAN80b]. Da der Realteil des Brechungsindex μ' abhängig von der Ladungsträgerdichte n ist, ändert sich im Laserbetrieb die optische Weglänge $2L\mu'$ im Resonator. Im Laserbetrieb führt dies zu einer Verschiebung der Resonanzfrequenzen (3.29) von ihren Schwellwerten. Zusätzlich verändert sich auch der Frequenzabstand

$$\Delta\omega_m = \omega_{m+1} - \omega_m$$

benachbarter Moden, der im Folgenden berechnet wird. Da das Material der aktiven Schicht dispersiv ist, muss neben der Abhängigkeit des Brechungsindex von der Ladungsträgerdichte auch dessen Frequenzabhängigkeit betrachtet werden. In dispersiven Materialien besteht kein linearer Zusammenhang zwischen der Wellenzahl k und der Frequenz. Dies bewirkt, dass sich die Geschwindigkeit der Flächen konstanter Phase einer Welle (Phasengeschwindigkeit) von der Geschwindigkeit, mit der sich die Einhüllende der Welle fortbewegt (Gruppengeschwindigkeit), unterscheidet. Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist durch

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

und ihre Gruppengeschwindigkeit durch

$$v_g = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1}$$

gegeben. Die Gruppengeschwindigkeit ist auch die Geschwindigkeit des Energieflusses durch das Medium. Sie berechnet sich für die Frequenz ω_0 zu

$$v_g(\omega_0) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \left(\frac{\mu'(\omega)\omega}{c} \right) \right\}^{-1} = \frac{c}{\mu'(\omega_0) + \omega_0 \frac{\partial \mu'}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0}} =: \frac{c}{\bar{\mu}(\omega_0)}.$$

In der letzten Gleichung wurde zusätzlich der Gruppenindex

$$\bar{\mu} = \mu'(\omega_0) + \omega_0 \left. \frac{\partial \mu'}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}$$

eingeführt. Aus Gleichung (3.29) folgt für aufeinanderfolgende Moden an der Laserschwelle

$$\omega_{m+1,th} \mu'(\omega_{m+1,th}) - \omega_{m,th} \mu'(\omega_{m,th}) = \frac{\pi c}{L}. \quad (3.30)$$

Wird der erste Term von (3.30) bis zu der ersten Ordnung in $\Delta\omega$ um $(\mu'(\omega_{m,th}), \omega_{m,th})$ entwickelt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{2L} &\approx \mu'(\omega_{m,th}) \omega_{m,th} + \mu'(\omega_{m,th}) (\omega_{m+1,th} - \omega_{m,th}) \\ &\quad + \omega_{m,th} \left. \frac{\partial \mu'}{\partial \omega} \right|_{\omega_{m,th}} (\omega_{m+1,th} - \omega_{m,th}) - \mu'(\omega_{m,th}) \omega_{m,th} \\ &= \Delta\omega_{m,th} \bar{\mu}(\omega_{m,th}). \end{aligned}$$

Für den Frequenzabstand zweier Moden an der Laserschwelle erhält man schließlich

$$\Delta\omega_{m,th} = \omega_{m+1,th} - \omega_{m,th} = \frac{\pi c}{\bar{\mu}(\omega_{m,th}) L}.$$

Ab jetzt werden wir annehmen, dass der Laser vorwiegend auf einer Frequenz emittiert und werden den Modenindex m deshalb unterdrücken. Die Umlaufzeit des Lichts in dem Resonator ist dann durch

$$\tau_{in} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{th}} = \frac{2\bar{\mu}L}{c} = \frac{2L}{v_g} \quad (3.31)$$

gegeben. Es kann nun eine Differenzgleichung für das Feld in dem Resonator hergeleitet werden, indem die Verstärkung des elektrischen Feldes bei einem Umlauf in dem Resonator berechnet wird. Diese kann in dem Grenzfall kleiner Umlaufzeiten τ_{in} durch eine Differentialgleichung erster Ordnung genähert werden. Dazu führen wir zuerst eine Umlaufverstärkung \hat{G} als den Quotienten der elektrischen Feldamplitude $\hat{E}_v(z_0, \omega)$ und der elektrischen Feldamplitude nach einem Umlauf in dem Resonator ein [YAR97]. Die Umlaufverstärkung an der Laserschwelle ist gleich Eins und wurde in (3.25) bereits berechnet ($\hat{G}|_{th} = 1$). Allgemein ergibt sie sich zu

$$\hat{G} = r_1 r_2 e^{2ikL} e^{2(g_{opt} - \kappa_{int})L}. \quad (3.32)$$

In dem nächsten Schritt wird $\hat{G} = G_1 \hat{G}_\omega$ in ein Produkt aus einem frequenzunabhängigen Anteil G_1 und einem frequenzabhängigen Anteil \hat{G}_ω zerlegt. Dabei kann die Frequenzunabhängigkeit der internen Verluste κ_{int} in der Nähe der betrachteten Longitudinalmode vernachlässigt werden [PET88]. Die Abhängigkeit

des Brechungsindex von der Frequenz und der Ladungsträgerdichte n darf hingegen nicht vernachlässigt werden, da der Term $2kL = 2L \frac{\mu'(\omega, n)\omega}{c}$ die Resonanzfrequenzen des Resonators bestimmt. In dieser Arbeit werden die Schwellwerte der Frequenz und der Ladungsträgerdichte als Entwicklungspunkt (ω_{th}, n_{th}) genommen. Dies wird von nun an mit $|_{th}$ abgekürzt. Die Schwellwertkonfiguration der Ladungsträgerdichte wird über die Beziehung $g_{opt,th} = g_{opt}(n_{th})$ bestimmt. Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung liefert

$$\frac{\mu'\omega}{c} \approx \frac{\omega_{th}\mu'_{th}}{c} + \frac{\omega_{th}}{c} \frac{\partial\mu'}{\partial n} \Big|_{th} (n - n_{th}) + \frac{1}{c} \underbrace{\left(\mu'_{th} + \omega_{th} \frac{\partial\mu'}{\partial\omega} \Big|_{th} \right)}_{\bar{\mu}_{th}} (\omega - \omega_{th}). \quad (3.33)$$

Mit der Näherung, dass der Brechungsindex sowohl linear von der Frequenz als auch linear von der Ladungsträgerdichte abhängt, kann der frequenzunabhängige Teil der Umlaufverstärkung durch

$$G_1 = r_1 r_2 e^{2(g_{opt} - \kappa_{int})L} \exp \left\{ i2L \frac{\omega_{th}}{c} \frac{\partial\mu'}{\partial n} \Big|_{th} (n - n_{th}) \right\} \quad (3.34)$$

und der frequenzabhängige Anteil durch

$$\begin{aligned} \hat{G}_\omega &= e^{i2L \frac{\omega_{th}\mu'_{th}}{c}} \exp \left\{ i \underbrace{\frac{2L\bar{\mu}_{th}}{c}}_{\tau_{in}} (\omega - \omega_{th}) \right\} \\ &= 1 \cdot e^{i\tau_{in}(\omega - \omega_{th})}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

ausgedrückt werden. In der zweiten Zeile von (3.35) wurde die Bedingung für die Resonanzfrequenzen der Kavität (3.27) und die Definition der Umlaufzeit (3.31) verwendet. Der den Umlaufgewinn beschreibende Operator \hat{G} (3.32) wird nun in der Zeitdomäne ausgedrückt. Dabei geht der Multiplikationsoperator $e^{i\tau_{in}\omega}$ in (3.35) in einen Zeitverschiebungsoperator $e^{-\tau_{in} \frac{d}{dt}}$ über. Für diesen Schritt muss die adiabatische Eliminierbarkeit der Polarisation (3.21) gewährleistet sein. Bei Anwendung des Umlaufgewinns ergibt sich für die komplexe, zeitabhängige Amplitude des vorwärtspropagierenden Feldes $E_v(t, z_0)$ an der Stelle z_0 folgende Gleichung

$$E_v(z_0, t) = G_1 \underbrace{e^{-i\tau_{in}\omega_{th}} e^{-\tau_{in} \frac{d}{dt}}}_{G_\omega(t)} E_v(z_0, t). \quad (3.36)$$

Bis jetzt haben wir, um die Herleitung übersichtlich zu gestalten, die Feldkonfiguration im Resonator als ebene Welle angenommen. Für die Beschreibung der Feldkonfiguration in dem Laser ist allerdings ein elektrisches Feld in der Näherung der langsam veränderlichen Amplitude (siehe Kapitel 2.6) besser geeignet [HAK85]. Deshalb erlauben wir nun für die Feldamplituden in (3.23) zeitlich zu variieren, jedoch langsam im Vergleich zu der Trägerwelle $e^{-i\omega_{th}t}$. Diese wird als mit der Schwellwertfrequenz des Lasers oszillierend angenommen. So ergibt sich für das elektrische Feld

$$E(z, t) = (E_v(z, t) + E_r(z, t)) e^{-i\omega_{th}t}.$$

Im Folgenden wird nur noch das vorwärtspropagierende Feld an der Stelle $z_0 = 0$ betrachtet und der Index v unterdrückt ($E_v(0, t) =: E(t)$). Außerdem wird für die komplexe, zeitabhängige Amplitude das Symbol $\check{E}(t)$ eingeführt. Die betrachtete Feldkonfiguration nimmt in dieser Notation die Form

$$E(t) = \check{E}(t)e^{-i\omega_{th}t} \quad (3.37)$$

an. Dabei ist es wichtig zu bemerken, dass die komplexe Amplitude \check{E} ebenfalls zu der Frequenz des Gesamtfeldes beiträgt. Auf diese Weise kann den Verschiebungen der aktuellen Frequenz ω des Lasers von seiner Schwellwertfrequenz ω_{th} durch höhere Stromdichten oder Rückkopplungseffekte Rechnung getragen werden. Dies ist einzusehen, wenn \check{E} in Polarkoordinaten als

$$\check{E}(t) = |\check{E}(t)|e^{-i\omega_{\check{E}}t}$$

ausgedrückt wird. Damit ergibt sich die Kreisfrequenz des Gesamtfeldes zu $\omega = \omega_{th} + \omega_{\check{E}}$. Einsetzen des Ansatzes der langsam variierenden Amplitude in (3.36) ergibt unter Beachtung, dass der Operator $e^{-\tau_{in}\frac{d}{dt}}$ Zeittranslationen um $-\tau_{in}$ bewirkt, folgendes:

$$\check{E}e^{-i\omega_{th}t} = G_1e^{-i\omega_{th}\tau_{in}}\check{E}(t - \tau_{in})e^{-i\omega_{th}(t - \tau_{in})} \quad (3.38a)$$

$$\Leftrightarrow \check{E}(t) = G_1\check{E}(t - \tau_{in}). \quad (3.38b)$$

Die Differenzgleichung für \check{E} ist durch (3.38b) gegeben. Sie besagt, dass \check{E} bei einem Umlauf um den Faktor G_1 verstärkt wird. Unter der Annahme, dass sich während τ_{in} die Amplitude \check{E} nur vernachlässigbar ändert, kann $\check{E}(t - \tau_{in})$ durch eine Entwicklung bis zur ersten Ordnung in τ_{in} angenähert werden

$$\check{E}(t - \tau_{in}) \approx \check{E}(t) - \tau_{in}\frac{d\check{E}(t)}{dt}. \quad (3.39)$$

Diese Annahme ist gerechtfertigt, da der Betrag des Umlaufgewinns $|G_1|$ im Laserbetrieb nur wenig größer als Eins ist [PET88]. In dieser Näherung erhält man aus der Differenzgleichung (3.38b) eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d\check{E}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_{in}}\left\{1 - \frac{1}{G_1}\right\}\check{E}(t). \quad (3.40)$$

Die Näherung ist gut, wenn sich die Feldamplitude $\check{E}(t)$ während der Umlaufzeit $\tau_{in} \sim 1$ ps nicht zu stark ändert. Da auf einer Pikosekunden-Zeitskala auch die adiabatische Eliminierbarkeit der Polarisation ihre Gültigkeit verliert, ist die Differentialgleichung (3.40) fast gleichwertig zu der Differenzgleichung (3.38b). Da $|G_1| \approx 1$ gilt kann der Term $1/G_1$ durch

$$\frac{1}{G_1} = e^{-\ln(G_1)} \approx 1 - \ln(G_1)$$

approximiert werden. Dadurch erhält die Bewegungsgleichung für das elektrische Feld (3.40) folgende Gestalt:

$$\frac{d\check{E}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_{in}} \ln(G_1) \check{E}(t) \quad (3.41a)$$

$$= \underbrace{\frac{2L}{\tau_{in}}}_{v_g} \left\{ g_{opt}(n) - \underbrace{\left(\kappa_{int} + \frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{r_1 r_2}\right) \right)}_{g_{opt,th}} \right\} \check{E}(t) \quad (3.41b)$$

$$+ i \frac{\omega_{th}}{c} \frac{\partial \mu'}{\partial n} \Big|_{th} (n - n_{th}) \check{E}(t). \quad (3.41c)$$

Gleichung (3.41b) kann noch prägnanter formuliert werden, wenn beachtet wird, dass $r_1 = \sqrt{R_1}$ und $r_2 = \sqrt{R_2}$ als reell und positiv vorausgesetzt wurden. Dann ergibt der zweite Term auf der rechten Seite von (3.41b) genau den optischen Gewinn an der Laserschwelle $g_{opt,th}$. Aus Gleichung (3.28) ist ersichtlich, dass solange wir nur eine Mode betrachten, das Produkt aus dem Realteil des Brechungsindex $\mu'(\omega, n)$ und der Resonanzfrequenz ω konstant bleibt. Dies ist verständlich, da sich die Resonanzfrequenz bezüglich der durch μ' bestimmten optischen Weglänge $2L\mu'$ in dem Resonator einstellt. In Gleichung (3.33) gilt also

$$\mu' \omega = \mu'_{th} \omega_{th} = \frac{\pi c}{L}.$$

Daher liefert Gleichung (3.33) mit c multipliziert den wichtigen Zusammenhang zwischen der momentanen Frequenzverschiebung des Lasers zu seiner Schwellwertfrequenz ($\omega - \omega_{th}$) und der momentanen Abweichung der Ladungsträgerinversion von ihrem Schwellwert:

$$\dot{\phi}(t) = \omega(t) - \omega_{th} = - \frac{\omega_{th}}{\bar{\mu}_{th}} \frac{\partial \mu'}{\partial n} \Big|_{th} (n(t) - n_{th}). \quad (3.42)$$

Dieser wichtige Zusammenhang bildet die Grundlage für die Beschreibung eines direktmodulierten Lasers. Dabei wird der Laser mit einem modulierten Strom $I(t)$ betrieben, der Schwankungen in der Ladungsträgerdichte $n(I(t))$ hervorruft. Sind diese klein genug, so dass die Änderung des Brechungsindex als linear angenommen werden kann (Kleinsignalanalyse), beschreibt (3.42) die Auswirkung der Modulation auf die Emissionsfrequenz. Mit Hilfe von (3.42) lässt sich (3.41b) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\check{E}(t)}{dt} &= \left\{ -i(\omega - \omega_{th}) + v_g (g_{opt}(n) - g_{opt,th}) \right\} \check{E}(t) \\ &= \left\{ -i(\omega - \omega_{th}) + v_g g_{opt}(n) - \frac{1}{\tau_{ph}} \right\} \check{E}(t) \end{aligned} \quad (3.43)$$

schreiben. Dabei wurde in dem letzten Schritt noch die Photonenlebensdauer

$$\tau_{ph} = (v_g g_{opt,th})^{-1} = \left\{ v_g \left(\kappa_{int} + \frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}\right) \right) \right\}^{-1}$$

eingeführt. Diese ist ein Maß für die Verluste durch Absorption (κ_{int}) und durch Reflexion an den Facetten. Letztere werden als Spiegelverluste bezeichnet und durch den Term $\frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)$ beschrieben. Halbleiterlaser haben im Vergleich zu anderen Lasertypen mit hochverspiegelten Facetten $R = 0.99$ große Spiegelverluste. So ergibt sich zum Beispiel für die Grenzfläche zwischen *GaAs* und Luft eine Reflektivität von nur $R = 0.32$. Zudem sind durch die hohe optische Verstärkung g_{opt} kurze Kavitätslängen L möglich. Dadurch werden die Spiegelverluste, die sich proportional zu L^{-1} verhalten, weiter erhöht. Dies ist ein Grund für die große Linienbreite $\Delta\nu \propto 1/\tau_{ph}$, die in Halbleiterlasern beobachtet wird [TAR95a]. Durch den nicht verschwindenden α -Faktor wird aufgrund der Beziehung $\Delta\nu \propto 1 + \alpha^2$ [HEN82] die Linienbreite weiter vergrößert. Darauf wird in Abschnitt 3.5 eingegangen.

3.2.1. Normierung des elektrischen Feldes

Das Ratengleichungsmodell für einen Quantenpunktlaser, das in Kapitel 5 vorgestellt wird, beschreibt das Lichtfeld durch eine Photonendichte. Um dieses Ratengleichungsmodell mit der bisher hergeleiteten Ratengleichung (3.43) der elektrischen Feldamplitude $\check{E}(t)$ kombinieren zu können, wird das elektrische Feld in dem Resonator so normiert, dass $|E(t)|^2 = |\check{E}(t)|^2$ der Photonenzahl N_{ph} in der Kavität entspricht. Die Photonenzahl ist definiert als die über eine Periodendauer T zeitlich gemittelte elektromagnetischen Feldenergie in dem Resonator U dividiert durch die Energie $\hbar\omega$ eines Photons mit der Kreisfrequenz ω der betrachteten Mode. Mit der Energiedichte in dem Resonator

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

ergibt sich N_{ph} zu [OHT06]

$$N_{ph}(t) = \frac{U(t)}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{cavity} \langle u(\mathbf{r}, t) \rangle_T d^3r = \frac{\epsilon_0 \bar{\mu} \mu'}{2\hbar\omega} \int_{V_{res}} |E(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r. \quad (3.44)$$

Hierbei wird mit $\langle \cdot \rangle_T$ die zeitliche Mittelung über eine Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ bezeichnet und es wird über das Volumen des Resonators $V_{res} = A \cdot h$ mit der Querschnittsfläche A und der Höhe h integriert. Unter der Annahme, dass sich die langsam variierende Feldamplitude \check{E} nur vernachlässigbar während einer Durchquerung des Resonators ändert, kann (3.44) durch

$$N_{ph}(t) = \frac{\epsilon_0 \bar{\mu} \mu'}{2\hbar\omega} |\check{E}(t)|^2 Ah \quad (3.45)$$

genähert werden. Von nun an werden wir ein auf die Wurzel der Photonenzahl normiertes Feld \bar{E} betrachten

$$\bar{E}(t) = \mathcal{N} E(t) = \mathcal{E}(t) e^{-i\omega_{th} t}, \quad \text{mit } \mathcal{N} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \bar{\mu} \mu'}{2\hbar\omega}} Ah. \quad (3.46)$$

Dabei wurde eine normierte, langsam variierende Feldamplitude \mathcal{E} und der dazugehörige Normierungsfaktor \mathcal{N} eingeführt. Es sei noch angemerkt, dass hier nur die einfachst mögliche Normierung betrachtet wurde. Genauere Normierungen können für bestimmte Feldkonfigurationen aber hergeleitet werden [TAR95a]. Für quantitative Vergleiche mit dem Experiment ist nicht die Photonenzahl in dem Resonator, sondern die emittierte Intensität entscheidend. Eine analytische Formel für diese findet sich in [PET88]. Die Ratengleichung für die elektrische Feldamplitude (3.43) nimmt in dieser Normierung die Gestalt

$$\dot{\mathcal{E}} = \left\{ -i(\omega - \omega_{th}) + v_g g_{opt}(n) - \frac{1}{\tau_{ph}} \right\} \mathcal{E}(t) \quad (3.47)$$

an.

3.3. Bewegungsgleichung der Ladungsträgerinversion

In diesem Abschnitt wird eine einfache Bewegungsgleichung für die Ladungsträgerinversion gewonnen, wie sie häufig in phänomenologischen Ratengleichungsmodellen verwendet wird. Es wird ein einfaches Zweibandmodell bestehend aus einem Leitungsband mit Elektronenzahldichte n_e und einem Valenzband mit Löcherzahldichte n_h betrachtet. Im Folgenden werden n_e und n_h auch verkürzend als Elektronen- und Löcherdichte bezeichnet. Alle auftretenden Dichten sind soweit nicht anders angegeben auf das Volumen der aktiven Zone $V_{akt} = Ad$ mit der Fläche A und der Dicke d bezogen. Genaugenommen müsste die Dynamik von Elektronen- und Löcherdichten getrennt betrachtet werden, wie dies auch in dem Ratengleichungsmodell für den Quantenpunktlaser (siehe Kapitel 5) gemacht wird. In diesem Modell wird aber vereinfachend für beide Ladungsträgerarten die gleiche Dynamik angenommen. Aufgrund der Ladungserhaltung gilt stets

$$\frac{\partial n_e(t)}{\partial t} - \frac{\partial n_h(t)}{\partial t} = 0,$$

so dass die Differenz beider Ladungsträgerarten eine von der Dotierung der Schichten abhängige Konstante C ergibt

$$n_e(t) - n_h(t) = C.$$

Für die folgende phänomenologische Beschreibung wird undotiertes Halbleitermaterial betrachtet, für das $C = 0$, also $n_e = n_h$ gilt. Da für beide Ladungsträgerarten die gleiche Dynamik angenommen wird, kann die Ladungsträgerdynamik in der aktiven Schicht allein durch die Ladungsträgerinversion

$$n(t) = n_e(t) + n_h(t) - N^{\text{VAL}}$$

beschrieben werden. Dabei ist N^{VAL} die Zustandsdichte des Valenzbandes. Die Ladungsträgerinversion stimmt mit der Dichte der Elektron-Loch-Paare in der aktiven Schicht überein und wird häufig, etwas missverständlich, als Ladungsträgerdichte bezeichnet. Nach [AGR93] ergibt sich für diese folgende Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{j(t)}{ed} + D\Delta n(t) - R(n(t)). \quad (3.48)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Generation von Elektron-Loch-Paaren in der aktiven Zone durch das Anlegen einer externen Spannung. Hierbei ist e die Elementarladung und $j(t)$ die den Laser durchfließende Stromdichte. Der zweite Term auf der rechten Seite beschreibt die Diffusion von Ladungsträgern mit dem Diffusionskoeffizienten D . Die Ladungsträgerdiffusion wird durch Intraband-Streuprozesse verursacht. Sie ist im Allgemeinen in Halbleiterlasern von großer Bedeutung, kann jedoch bei manchen Laserdesigns vernachlässigt werden. Um dies zu rechtfertigen, muss die betrachtete Laserstruktur stark indexgeleitet sein [AGR93], das heißt, die Form der Lichtmoden im Laser wird vorwiegend durch den Brechungsindexunterschied zwischen einem schmalen Wellenleiter und den umgebenden Schichten bestimmt. Der Wellenleiter entsteht, indem zusätzlich zu der transversalen Schichtung die aktive Zone auch lateral von Material mit einem kleineren Brechungsindex umgeben wird. In Abb. 3.3 ist dies am Beispiel eines $AlGaAs/GaAs$ -Materialsystems dargestellt. Wenn der Querschnitt des Wellenleiters klein gegenüber der Diffusions-

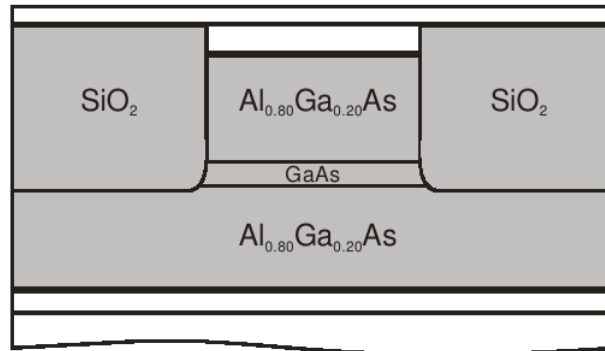


Abbildung 3.5.: Veranschaulichung einer indexgeleiteten Laserstruktur am Beispiel eines $AlGaAs/GaAs$ -Materialsystems. Gezeigt ist ein Schnitt senkrecht zu der Laserachse. Die aktive Schicht aus $GaAs$ wird nicht nur transversal durch zwei $Al_{0.80}Ga_{0.20}As$ -Schichten mit geringerem Brechungsindex begrenzt, sondern auch lateral durch SiO_2 -Schichten. Dadurch entsteht ein schmaler Wellenleiter. Abbildung entnommen aus [KUN05c].

länge der Ladungsträger ist, werden Inhomogenitäten der Ladungsträgerdichte quasi-instantan ($\ll 1$ ps) auf der Zeitskala der Interband-Generations- und Rekombinationsprozesse von Elektron-Loch-Paaren (~ 1 ns) ausgeglichen. Daher

kann die Ladungsträgerdichte in der aktiven Zone in diesem Fall als konstant angenommen werden.

Die Rate $R(n)$ beinhaltet alle Verluste durch Interband-Ladungsträgerrekombinationen. Sie lässt sich weiter aufspalten in

$$R(n) = \frac{1}{\tau_c}n + R_{ind}(n, n_{ph}).$$

Dabei ist $R_{ind} = R_{st}(n)n_{ph}$ die Rate der induzierten Emission. Sie ist proportional zu der Photonendichte in der aktiven Zone $n_{ph} = n_{ph}/V_{akt}$. R_{st} ist die Nettorate aus stimulierter Absorption und Emission. Die inverse Ladungsträgerlebensdauer beinhaltet Verluste durch nicht strahlende Rekombination sowie spontane Emission. Sie kann nach [OLS84] in folgender Form dargestellt werden

$$\tau_c^{-1} = A_{nr} + Bn + Cn^2. \quad (3.49)$$

Dabei werden mit dem Term A_{nr} nicht strahlende Verluste durch Rekombination von Ladungsträgern an Gitterdefekten und Materialverunreinigungen beachtet. Die Rate der spontanen strahlenden Rekombination eines Elektron-Loch-Paares ist durch Bn gegeben. Sie ist deshalb proportional zu dem Produkt $n_e \cdot n_h$ aus Elektron- und Lochdichte, die hier als gleich angenommen werden. Der Term Cn^2 steht für Auger-Rekombinationsprozesse.

In einfachen Modellen werden A_{nr} , B und C als Konstanten angenommen, die an Messwerte angepasst werden. Eine Besonderheit des in Kapitel 5 beschriebenen Ratengleichungsmodells für einen Quantenpunktlaser ist die explizite Berechnung der Ein- und Ausstreuraten von Elektronen und Löchern aus der Benetzungsschicht in die Quantenpunkte.

Die in diesem Abschnitt hergeleitete Bewegungsgleichung der Ladungsträgerinversion nimmt folgende Gestalt an:

$$\boxed{\frac{dn(t)}{dt} = \frac{j(t)}{ed} - \frac{1}{\tau_c(n(t))}n(t) - R_{st}(n(t))n_{ph}(t).} \quad (3.50)$$

verwendet.

3.4. Dreivariablen Ratengleichungssystem

In diesem Abschnitt wird die Bewegungsgleichung für die komplexe Feldamplitude \mathcal{E} (3.47) mit der Ladungsträgergleichung (3.50) in Verbindung gebracht. Dafür wird der Zusammenhang zwischen der Nettorate R_{st} aus stimulierter Absorption und Emission und dem optischen Gewinn g_{opt} benötigt. Indem \mathcal{E} in Polarkoordinaten dargestellt wird

$$\mathcal{E}(t) = \sqrt{N_{ph}(t)}e^{-i\phi(t)},$$

kann die komplexe Bewegungsgleichung von \mathcal{E} (3.47) in zwei reelle Bewegungsgleichungen, eine für die Photonendichte N_{ph} und eine für die Phase ϕ , umgeschrieben werden. Die Differentialgleichung für die Photonendichte ergibt sich aus der Beziehung

$$\dot{N}_{ph} = \frac{d(\mathcal{E}\mathcal{E}^*)}{dt} = \dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^* + \{\dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^*\}^* = 2\Re\{\dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^*\}. \quad (3.51)$$

Hierbei wurde die komplex konjugierte Feldamplitude \mathcal{E}^* eingeführt. Der Realteil einer komplexen Größe wird mit \Re bezeichnet und ihr Imaginärteil mit \Im . Die Bewegungsgleichung für ϕ folgt aus

$$\dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^* = \frac{1}{2}\dot{N}_{ph} - iN_{ph}\dot{\phi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\phi} = -\frac{1}{N_{ph}}\Im\{\dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^*\}. \quad (3.52)$$

Zusammen mit der Gleichung für die Ladungsträger (3.48) wird der Laser nun durch folgendes System von Differentialgleichungen beschrieben

$$\dot{N}_{ph}(t) = 2v_g\{g_{opt}(n(t)) - g_{opt,th}\}N_{ph}(t) \quad (3.53a)$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega(t) - \omega_{th} = -\frac{\omega_{th}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \mu'}{\partial n} \Big|_{th} (n(t) - n_{th}) \quad (3.53b)$$

$$\dot{n}(t) = \frac{j(t)}{ed} - \frac{1}{\tau_c(n(t))}n(t) - R_{st}(n(t))\frac{N_{ph}(t)}{V_{akt}}. \quad (3.53c)$$

Da in der Gleichung für die Photonenzahl (3.53a) Gewinne durch spontane Rekombination von Ladungsträgern noch nicht beachtet wurden, ist die Zuwachsrate der Photonendichte $n_{ph} = N_{ph}/V_{akt}$ nur durch die Nettorate (3.53a) aus induzierter Emission und Absorption gegeben

$$\dot{n}_{ph} = R_{st}n_{ph}. \quad (3.54)$$

Der Vergleich von (3.53a) mit (3.54) liefert

$$R_{st} = 2v_g g_{opt} =: 2v_g g. \quad (3.55)$$

In der letzten Gleichung wurde der „Ladungsträgergewinn“ g eingeführt. Bei dieser Definition wurde noch nicht beachtet, dass die in Gleichung (3.53c) betrachteten Ladungsträger (Elektron-Loch-Paare) in das Volumen der aktiven Zone eingeschlossen sind, während in grober Näherung angenommen werden kann, dass das elektrische Feld sich in dem gesamten Volumen des Resonators V_{res} ausbreitet. Dies bedeutet, dass nur ein Anteil

$$\Gamma := \frac{V_{akt}}{V_{res}} \quad (3.56)$$

der Photonen zu der stimulierten Emission beitragen kann [FIO07]. Dabei ist Γ der bereits in Abschnitt 2.4 eingeführte optischen Füllfaktor. Für den allgemeineren Fall eines Halbleiterheteroübergangs ($V_{akt} < V_{res}$) ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen optischer Verstärkung und „Ladungsträgergewinn“

$$g_{opt} = \Gamma g. \quad (3.57)$$

Wenn nicht der phänomenologische Ansatz ebener longitudinaler Wellen gewählt wird, sondern allgemeinere Lösungen der Wellengleichung (3.22) betrachtet werden, ergibt sich der optische Füllfaktor Γ aus der räumlichen Mittelung über die transversalen und lateralen Moden [AGR93]. Mit (3.57) nimmt das Gleichungssystem (3.53) die Gestalt

$$\dot{N}_{ph}(t) = 2v_g\Gamma\{g(n(t)) - g_{th}\}N_{ph}(t) \quad (3.58a)$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega(t) - \omega_{th} = -\frac{\omega_{th}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \mu'}{\partial n} \Big|_{th} (n(t) - n_{th}) \quad (3.58b)$$

$$\dot{n}(t) = \frac{j(t)}{ed} - \frac{1}{\tau_c(n(t))}n(t) - 2v_g g(n(t)) \frac{N_{ph}(t)}{V_{akt}} \quad (3.58c)$$

an. In (3.58a) wurde noch die auf die Ladungsträger bezogene Schwellwertverstärkung $g_{th} = \Gamma^{-1}g_{opt,th}$ eingeführt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass ohne Rückkopplung Gleichung (3.58a) und (3.58b) nicht direkt miteinander gekoppelt sind. Daher kann das Gleichungssystem (3.58) kein chaotisches Verhalten zeigen. Durch die Rückkopplung werden die Bewegungsgleichungen für Photonenzahl und Phase miteinander gekoppelt. Dieses System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen kann nun chaotisches Verhalten zeigen [TAR98]. Formuliert bezüglich der komplexen normierten Feldamplitude \mathcal{E} ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \left\{ -i(\omega(t) - \omega_{th}) + v_g\Gamma(g(n(t)) - g_{th}) \right\} \mathcal{E}(t) \quad (3.59a)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{j(t)}{ed} - \frac{1}{\tau_c(n(t))}n(t) - 2v_g g(n(t)) \frac{|\mathcal{E}(t)|^2}{V_{akt}}. \quad (3.59b)$$

3.5. Der linienbreitenvergrößernde Faktor α

In Halbleiterlasern entsteht Frequenzdynamik durch die Veränderung des Brechungsindex der aktiven Zone, wenn diese mit Elektron-Loch-Paaren geflutet wird (vergleiche (3.58b)). Variationen des Brechungsindex $\Delta\mu'(n)$ verändern die optische Weglänge im Resonator $2L\mu'$ und damit dessen Resonanzfrequenzen. Der Realteil des Brechungsindex steht über (3.17) mit dem Realteil der elektronischen Suszeptibilität $\hat{\chi}_e'$ in Verbindung und der optische Gewinn g_{opt} ist über (3.19) mit dem Imaginärteil der elektronischen Suszeptibilität $\hat{\chi}_e''$ verknüpft. Real- und Imaginärteil der elektronischen Suszeptibilität sind über die Kramer-Kronig-Relationen gekoppelt [CZY04]. Daher bewirkt eine ladungsträgerinduzierte Änderung des Brechungsindex eine Veränderung des optischen Gewinns und beeinflusst damit die Amplitudendynamik (vergleiche (3.58a)). Der linienbreitenvergrößernde Faktor, im Folgenden als α -Faktor bezeichnet, beschreibt das Verhältnis von der Änderung des Realteils der Suszeptibilität mit der Ladungsträgerdichte n zu der Änderung des Imaginärteils der Suszeptibilität mit

der Ladungsträgerdichte

$$\alpha(\omega, n) := - \frac{\left(\frac{\partial \hat{\chi}_e'}{\partial n} \right)}{\left(\frac{\partial \hat{\chi}_e''}{\partial n} \right)} \Big|_{(\omega, n)}. \quad (3.60)$$

Er stellt damit ein Maß für die Phasen-Amplitudenkopplung dar. Gewöhnlich ist die ladungsträgerinduzierte Änderung der Suszeptibilität gering [OSI87]. Deshalb kann die Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Ladungsträgerdichte als linear angenommen werden. Unter dieser Annahme kann der α -Faktor auch durch das Verhältnis des Real- und Imaginärteils der ladungsträgerinduzierten Suszeptibilität $\hat{\chi}_p'$ und $\hat{\chi}_p''$ ausgedrückt werden [TAR95a]

$$\alpha(\omega, n) = - \frac{\hat{\chi}_p'(\omega, n)}{\hat{\chi}_p''(\omega, n)} = - \frac{\omega}{c\Gamma} \frac{\left(\frac{\partial \mu'}{\partial n} \right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial n} \right)} \Big|_{(\omega, n)}. \quad (3.61)$$

In der letzten Gleichung wurde ein Vorgriff auf den Abschnitt 3.5.2 gemacht und der α -Faktor für das in diesem Kapitel hergeleitete Ratengleichungssystem eingeführt. Es gibt zwei Mechanismen, die eine Phasen-Amplitudenkopplung und damit einen nicht verschwindenden α -Faktor, verursachen. Zum einen ändert sich die elektronische Suszeptibilität $\hat{\chi}_e$ mit der Verschiebung der Resonanzfrequenz der Laserdiode. Der daraus resultierende α -Faktor ist allerdings vernachlässigbar klein [HEN82]. Zum anderen wird $\hat{\chi}_e$ durch die Anwesenheit freier Ladungsträger in der aktiven Zone, beschrieben durch die Ladungsträgerinversion n , beeinflusst. Um beiden Mechanismen der Phasen-Amplitudenkopplung Rechnung zu tragen müsste in der Definition des α -Faktors (3.60) noch ein Term proportional zu $\left(\frac{\partial \omega \hat{\chi}_e'}{\partial \omega \hat{\chi}_e''} \right) \Big|_{\omega, n(\omega)}$ hinzugenommen werden. In Halbleiterlasern dominiert jedoch der durch die Ladungsträgerinversion induzierte Anteil des α -Faktor, weshalb die Definition (3.60) üblich ist.

Findet der strahlende Übergang zwischen diskreten Energieniveaus statt, ist der optische Gewinn $g_{opt}(\omega)$ symmetrisch bezüglich der Frequenz ω mit einem Maximum bei der Frequenz des optischen Überganges [TAR95a]. Über die Kramer-Kronig-Relationen (oder die Symmetrie der Hilbert-Transformation [OSI87]) folgt, dass damit die ladungsträgerinduzierte Änderung des reellen Brechungsindex $\Delta \mu'(\omega) = \hat{\chi}_p' / 2\mu_{bg}$ antisymmetrisch bezüglich der Frequenz ist und eine Nullstelle bei der Frequenz des optischen Überganges hat. Über (3.17) und (3.19) ist damit der α -Faktor Null. Da in Gaslasern die optisch aktiven Übergänge zwischen diskreten Niveaus stattfinden und sie nur eine vernachlässigbare inhomogene Verbreiterung aufweisen, haben sie α -Faktoren nahe Null [OSI87]. In gewöhnlichen Halbleiterlasern finden die optischen Übergänge nicht wie bei Gaslasern zwischen diskreten Energieniveaus, sondern zwischen partiell gefüllten Energiesubbändern statt. Daher haben sie ein asymmetrisches Gewinnprofil bezüglich der Frequenz mit einem Maximum, das gegenüber der Laserfrequenz verschoben ist [PET88]. Dadurch hat die ladungsträgerinduzierte Brechungsindexänderung $\Delta \mu'$ eine von der Laserfrequenz verschobene Nullstelle. Henry

[HEN82] erkannte als erster, dass dies zu α -Faktoren in der Größenordnung von Fünf führt. Mit der von ihm stammenden Definition (3.69) stimmt die über den Zusammenhang

$$\Delta\nu \propto 1 + \alpha^2 \quad (3.62)$$

theoretisch berechnete Linienbreite von gewöhnlichen Halbleiterlasern (nicht Quantenpunktlasern) gut mit den experimentell gemessenen Werten überein [HEN82].

Eine starke Phasen-Amplitudenkopplung wird für einige Nachteile von Halbleiterlasern verantwortlich gemacht. So haben sie nach (3.62) eine größere Linienbreite und damit eine geringere Strahlqualität als Gaslaser. Desweiteren kann eine starke Phasen-Amplitudenkopplung auch zu einer räumlichen Aufspaltung einer sogenannten Filamentierung des Strahls führen. Zudem wirkt sich eine starke Kopplung auf die dynamischen Eigenschaften des Lasers aus. So ist die Veränderung der Emissionsfrequenz eines direktmodulierten Lasers mit der Modulationsfrequenz proportional zu dem α -Faktor [PET88].

3.5.1. Der α -Faktor in Quantenpunktlasern

In Quantenpunktlasern findet der optisch aktive Übergang zwischen diskreten Energieniveaus statt. Nach den Ausführungen des letzten Abschnitts haben ideale Quantenpunkt laser daher einen α -Faktor von Null. Bei den in dieser Arbeit betrachteten Quantenpunkten ist jedoch das Gewinnprofil des Quantenpunktensembles inhomogen (bezüglich der Frequenz) verbreitert. Dies liegt zum einen an der statistischen Größenverteilung der Quantenpunkte. Mit dieser variiert auch die Aufspaltung ihrer Energieniveaus. Desweiteren ist auch der Indiumgehalt der Quantenpunkte statistisch verteilt, was ebenfalls zu einer Aufspaltung der Niveaus beiträgt. Die inhomogene Linienverbreiterung liegt in der Größenordnung von (10-100) meV. Damit sie etwa drei Größenordnungen über der durch die endlichen Ladungsträgerlebensdauern τ_c hervorgerufenen homogenen Verbreiterung von einigen μeV [BIM99].

Experimentell werden in Quantenpunktlasern sehr unterschiedliche α -Faktoren zwischen 0 [MI05] und 60 gemessen [DAG05]. Dies wird in einer theoretischen Arbeit von Melnik, Huyet und Uskov mit der Verschiedenheit der experimentellen Methoden zur Bestimmung des α -Faktors begründet [MEL06]. Diese Methoden liefern für herkömmliche Halbleiterlaser ähnliche, für Quantenpunkt laser jedoch unterschiedliche Ergebnisse. Den Autoren gelingt es, die Ergebnisse von Experimenten, die mit drei unterschiedlichen Messmethoden (Verstärkte Spontane Emission, Kleinsignal FM/AM-Antwort und direkte Messung der Linienbreite) durchgeführten wurden, zu reproduzieren. Dazu benutzen sie ein zu den LK-Gleichungen ähnliches Ratengleichungsmodell mit einer Ratengleichung für die komplexe Amplitude des elektrischen Feldes und jeweils einer Ratengleichung für die Ladungsträgerdichten in der Benetzungsschicht und in

den Quantenpunkten. Ihr Modell für den α -Faktor passen sie an die jeweilige Messmethode an. Gemeinsam ist den Modellen jedoch, dass zum einen nicht nur ein fester α -Faktor ($\alpha = \alpha(\omega_{th})$) wie in unserem Modell verwendet wird, sondern die α -Faktoren von anderen Variablen wie zum Beispiel der Pumpstromdichte oder der Ladungsträgerdichte in der Benetzungsschicht abhängen. Zum anderen teilen die Autoren die α -Faktoren in zwei Anteile: Der eine wird durch die nicht resonante Ladungsträgerdichte in der Benetzungsschicht und der andere durch die Ladungsträgerdichte in den Quantenpunkten verursacht. Gemäß den Autoren ist das Konzept, die Phasen-Amplitudenkopplung durch den α -Faktor auszudrücken, für Quantenpunktlaser problematisch, da es von der Messmethode abhängig ist. Experimentell findet dies in einer Arbeit von Schneider et al. [SCH04d] Bestätigung. Zahlreiche experimentelle Studien belegen, dass unabhängig von der Problematik der Messmethode, die Phasen-Amplitudenkopplung in Quantenpunktlasern tendenziell geringer ist und eine geringere Frequenzabhängigkeit aufweist als in vergleichbaren Quantengrabenlasern [UKH02, UKH04, POE05]. Daher sollte die Strahlqualität von Quantenpunktlasern besser als die von Quantengrabenlasern sein, was auch durch [GEH04, Rib03] bestätigt wird. Die Autoren führen dies auf einen geringeren α -Faktor und eine stärkere Lokalisierung der Ladungsträgerinversion durch einen geringeren Überlapp der elektronisch aktiven Zone mit der optische Mode (kleiner Γ -Faktor) zurück.

3.5.2. Einführung des α -Faktors in das Modell

In dem einfachen hier betrachteten Modell werden räumliche Variationen des Brechungsindex μ' und des Gewinns g vernachlässigt. Da die Abweichung der Ladungsträgerinversion im Laserbetrieb n von ihrem Schwellwert n_{th} gering ist, wird angenommen, dass die Verstärkung linear mit der Ladungsträgerdichte variiert [PET88]

$$g(n) = \underbrace{g(n_{th})}_{g_{th}} + \left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{th} (n - n_{th}). \quad (3.63)$$

Zusätzlich wird auch der Realteil des Brechungsindex als linear mit der Ladungsträgerinversion variierend angenommen

$$\mu'(n) = \underbrace{\mu'(n_{th})}_{\mu'_{th}} + \left. \frac{\partial \mu'}{\partial n} \right|_{th} (n - n_{th}). \quad (3.64)$$

Mit diesen Annahmen folgt aus (3.17) und (3.19) für den Realteil $\hat{\chi}'_p$ und den Imaginärteil $\hat{\chi}''_p$ der ladungsträgerinduzierten Suszeptibilität

$$\hat{\chi}'_p(n) = 2\mu'_{bg}(\mu'(n) - \mu'_{bg}) \quad (3.65a)$$

$$\hat{\chi}''_p(n) = -2\frac{\mu'_{bg}}{k_0}\Gamma g(n) - \hat{\chi}''_{bg}. \quad (3.65b)$$

Wird die Aufteilung von $\hat{\chi}_e$ in hintergrunds- und pumpinduzierte Anteile so gewählt, dass $\hat{\chi}_{bg}$ die Suszeptibilität an der Laserschwelle darstellt und somit $\mu_{bg} = \mu'_{th}$ gilt, nehmen die Gleichungen (3.65) folgende Gestalt an

$$\hat{\chi}'_p(n) = 2\mu'_{th} \left. \frac{\partial \mu'}{\partial n} \right|_{th} (n - n_{th}) \quad (3.66a)$$

$$\hat{\chi}''_p(n) = -2 \frac{\mu'_{th}}{k_0} \Gamma \left(g_{th} + \left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{th} (n - n_{th}) \right) - \hat{\chi}''_{bg}. \quad (3.66b)$$

Mit $g_{opt} = \Gamma g$ folgt aus (3.65b) der Zusammenhang zwischen dem Gewinn g und dem Imaginärteil der Suszeptibilität an der Laserschwelle

$$g_{opt,th} = -\frac{1}{2} \frac{k_0}{\mu'_{th}} \left(\hat{\chi}''_{bg} + \underbrace{\chi''_p|_{th}}_0 \right) \Leftrightarrow \hat{\chi}''_{bg} = -2\Gamma \frac{\mu'_{th}}{k_0} g_{th}. \quad (3.67)$$

Mit den Gleichungen (3.66), (3.67) und dem Vakuumwellenvektor $k_0 = \omega/c$ ergibt sich die ladungsträgerinduzierte Suszeptibilität zu

$$\hat{\chi}'_p(n, \omega) = 2\mu'_{th} \left(\left. \frac{\partial \mu'}{\partial n} \right|_{th} + i \frac{c}{\omega} \Gamma \left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{th} \right) (n - n_{th}). \quad (3.68)$$

Für den α -Faktor in unserem Modell gilt also die Beziehung

$$\alpha(\omega) = -\frac{\omega}{c\Gamma} \left. \frac{\left(\frac{\partial \mu'}{\partial n} \right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial n} \right)} \right|_{th}. \quad (3.69)$$

Diese Formel für den α -Faktor unterscheidet sich um einen Faktor zwei von der in den meisten Veröffentlichungen (z.B. [OSI87]) angegebenen Formel, da in dieser Arbeit die Verstärkung g bezüglich der Amplitude des elektrischen Feldes und nicht bezüglich der Intensität $I \propto |\mathcal{E}|^2$ gewählt wurde. Mit der Gleichung (3.42) nimmt die Feldgleichung (3.59a) die Gestalt

$$\dot{\mathcal{E}} = \left\{ i \frac{\omega_{th}}{\bar{\mu}} \left. \frac{\partial \mu'}{\partial n} \right|_{th} + \Gamma v_g \left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{th} \right\} (n - n_{th}) \mathcal{E}(t) \quad (3.70a)$$

$$= \Gamma \left\{ 1 + i \frac{\omega_{th}}{c\Gamma} \left. \frac{\partial \mu'}{\partial n} \right|_{th} \right\} \underbrace{v_g \left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{th}}_{G_{n_{th}}} (n - n_{th}) \mathcal{E}(t) \quad (3.70b)$$

an. Dabei wurde in (3.70b) noch die differenzielle Gewinnrate an der Laserschwelle $G_{n_{th}} = v_g \left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{th}$ eingeführt. Mit dem α -Faktor an der Laserschwelle $\alpha(\omega_{th}) := \alpha$ nimmt das gekoppelte Gleichungssystem (3.59) folgende Form an

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = (1 - i\alpha) \Gamma G_{n_{th}} (n(t) - n_{th}) \mathcal{E}(t) \quad (3.71a)$$

$$\dot{n}(t) = \frac{j(t)}{ed} - \frac{1}{\tau_c(n(t))} n(t) - 2 \left(\underbrace{v_g g_{th}}_{\frac{1}{\Gamma \tau_{ph}}} + G_{n_{th}} (n(t) - n_{th}) \right) \frac{|\mathcal{E}(t)|^2}{V_{akt}}. \quad (3.71b)$$

Für die Vereinigung beider Ratengleichungsmodelle ist es nützlich (3.71) auch als Ratengleichungen für die Photonenzahl und die Phase aufzuschreiben

$$\dot{N}_{ph}(t) = 2\Gamma G_{n_{th}}(n(t) - n_{th})N_{ph}(t) \quad (3.72a)$$

$$\dot{\phi}(t) = \alpha\Gamma G_{n_{th}}(n(t) - n_{th}) \quad (3.72b)$$

$$\dot{n}(t) = \frac{j(t)}{ed} - \frac{1}{\tau_c(n(t))}n(t) - 2\left(\frac{1}{\Gamma\tau_{ph}} + G_{n_{th}}(n(t) - n_{th})\right)\frac{N_{ph}(t)}{V_{akt}}. \quad (3.72c)$$

3.6. Spontane Emission in der Feldgleichung

Die Feldgleichung des bisher hergeleiteten Ratengleichungssystems (3.71) enthält noch nicht die spontane Emission von Ladungsträgern als Quelle von strahlender Rekombination. Dieser wurde bis jetzt nur in der Bewegungsgleichung für die Ladungsträgerinversion (3.71b) in dem Term für Ladungsträgerlebensdauer τ_c (Gleichung (3.49)) Rechnung getragen. Die spontane Emission wird durch die Vakuumfluktuationen des elektrischen Feldes hervorgerufen, hat also einen rein quantenmechanischen Ursprung. Sie kann daher nicht aus dem in dieser Arbeit gewählten semiklassischen Ansatz, bei dem die Felder klassisch betrachtet werden, hergeleitet werden. Es ist jedoch wichtig den Beitrag der spontanen Emission zur Phasen- und Amplitudendynamik miteinzubinden, da sie ein Ursprung für die Linienbreite des Lasers ist. Im Allgemeinen tragen zu der Linienbreite nicht nur durch die spontane Emission hervorgerufene Fluktuationen der komplexen elektrischen Feldamplitude, sondern auch thermische Fluktuationen bei. Auch in der Gleichung für die Ladungsträgerinversion (3.71b) müsste strenggenommen noch Schrotrauschen verursacht durch die diskrete Struktur der Ladungsträger beachtet werden. Letzteres kann jedoch für gewöhnlich vernachlässigt werden. In Halbleiterlasern vom Fabry-Perot-Typ dominiert aufgrund der im Vergleich zu Gaslasern kurzen Photonlebensdauer $\tau_{ph} = (v_g g_{opt,th})^{-1}$ der Beitrag der spontanen Emission [TAR95a]. Die spontane Emission kann wie folgt in die Ratengleichung aufgenommen werden: Wird die normierte Feldamplitude

$$\mathcal{E}(t) = \sqrt{N_{ph}(t)}e^{-i(\omega_{th}t + \phi(t))}$$

betrachtet, so drückt sich das i -te Ereignis der spontanen Emission durch ein zufälliges Anwachsen der Feldamplitude um Eins begleitet durch eine Änderung ihrer Phase ϕ um einen zufälligen Winkel ϕ_i aus (vergleiche Abb. 3.6). Unter der Annahme, dass zeitlich aufeinanderfolgende Ereignisse unkorreliert sind, kann der Beitrag der spontanen Emission zur Dynamik der Feldamplitude \mathcal{E} durch komplexes *Gaußsches weißes Rauschen* $F_{\mathcal{E}}(t) = F'_{\mathcal{E}}(t) + iF''_{\mathcal{E}}(t)$ beschrieben werden. Dabei ist $F_{\mathcal{E}}(t)$ eine komplexe Zufallsvariable. Ihr Realteil $F'_{\mathcal{E}}(t)$ und ihr Imaginärteil $F''_{\mathcal{E}}(t)$ sind zu jedem Zeitpunkt (bis auf einen Normierungsfaktor)

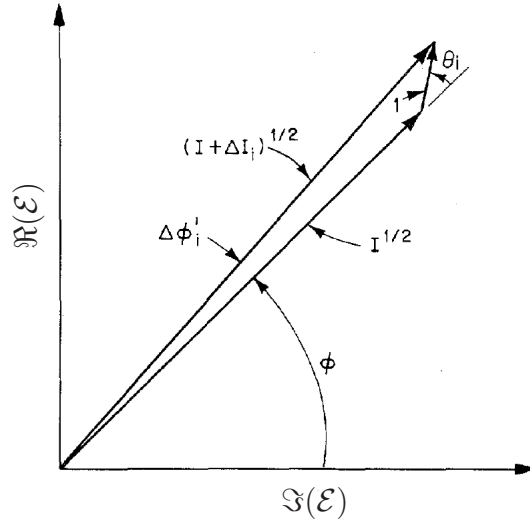


Abbildung 3.6.: Änderungen der Phase ϕ und der Intensität I durch spontane Emission. Die auf die Wurzel der Photonenzahl normierte Feldamplitude $\mathcal{E} = \sqrt{I}e^{i\phi}$ ändert sich um $\Delta\mathcal{E} = 1 \cdot e^{i\phi_i}$, hat also die Amplitude Eins und die zufällige Winkeländerung ϕ_i . Nach [HEN82].

normalverteilte Zufallsvariablen mit verschwindendem Mittelwert. Zufallsvariablen zu verschiedenen Zeitpunkten sind nicht korreliert

$$\langle F_{\mathcal{E}}(t) \rangle = 0 \quad \langle F_a(t) F_b(t') \rangle = \frac{1}{2} \tilde{R}_{sp} \delta_{a,b} \delta(t - t').$$

Dabei markiert $\langle \cdot \rangle$ die statistische Mittelwertbildung. Die Rate der spontanen Emission ist durch

$$\tilde{R}_{sp}(n) = \frac{\beta n}{\tau_c(n)}$$

gegeben. Sie wächst mit der Inversionsdichte n an, da mit steigender Dichte der Elektron-Loch-Paare eine spontane Rekombination wahrscheinlicher wird. β ist die Wahrscheinlichkeit, dass das spontan rekombinierende Elektron-Loch-Paar zu der betrachteten longitudinalen Lasermode beiträgt. Damit wird aus der gewöhnlichen Differentialgleichung für das elektrische Feld eine stochastische Differentialgleichung

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = (1 - i\alpha)\Gamma G_{n_{th}}(n(t) - n_{th})\mathcal{E}(t) + F_{\mathcal{E}}(t).$$

Der Rauschterm hat den statistischen Mittelwert

$$\langle F_{\mathcal{E}}(t) F_{\mathcal{E}}^*(t') \rangle = \tilde{R}_{sp} \delta(t - t').$$

Genauer über stochastische Differentialgleichungen und deren Transformation auf andere Koordinaten findet sich in dem Anhang A.

4. Das Lang-Kobayashi-Modell

Bis hierher haben wir die Laserdiode als optisch von der Umgebung unabhängiges System betrachtet. In dem letzten Abschnitt wurde bereits erwähnt, dass die Facetten eines Halbleiterlasers ein im Vergleich zu anderen Lasertypen geringes Reflexionsvermögen $R \approx 0.3$ aufweisen. Da damit das Transmissionsvermögen $T = 1 - R$ der Facetten vergleichsweise groß ist, wird das Emissionsverhalten einer Laserdiode bereits durch schwache externe optische Signale beeinflusst. Eine ausführliche Studie dazu findet sich in [TKA86]. Diese Sensibilität kann für technische Anwendungen von Nachteil sein, da sich unerwünschte Reflexionen zum Beispiel bei der Einkopplung des Lichts in Lichtleiter nicht völlig verhindern lassen. Diese können die Stabilität des Signals negativ beeinflussen. Optische Rückkopplung ruft aber auch positive Effekte hervor. So kann sie zum Beispiel eine Verringerung der Linienbreite des Signals bewirken [GOL82]. Lang und Kobayashi untersuchten zu Beginn der 80-iger Jahre den Einfluss eines externen, hinter einer der Facetten einer Laserdiode positionierten Spiegels sowohl experimentell als auch theoretisch [LAN80a]. Die von ihnen vorgeschlagene Generalisierung der Ratengleichungen für den Fall schwacher externer Rückkopplung ist mit verschiedenen Arten externer Rückkopplung immer noch Gegenstand aktueller Untersuchungen (siehe zum Beispiel [FLU07, DAH08b]). Ein schöner Überblick über die Vielfalt der beobachteten Phänomene und aktuelle theoretische Konzepte zu deren Beschreibung findet sich in [KAN05]. In diesem Kapitel wird zuerst in Abschnitt 4.1 die Feldgleichung des Lang-Kobayashi-Modells (**LK-Modells**) hergeleitet. Dann werden in Abschnitt 4.2 dessen Gültigkeitsgrenzen ausgelotet. Schließlich wird in Abschnitt 4.3 geprüft, in wie fern sich für technologische Anwendungen interessante integrierte Strukturen mit diesem einfachen Lasermodell beschreiben lassen.

4.1. Herleitung des LK-Modells

Für die Herleitung des LK-Modells betrachten wir wieder eine Fabry-Perot-Resonator-Anordnung. Diese besteht aus drei planaren Spiegeln, die zwei Resonatoren bilden (siehe Abb. 4.1). Die Laserdiode wird durch einen Resonator mit Grenzflächen bei $z = -L$ und $z = 0$ modelliert. Er ist mit dem Material der aktiven Zone gefüllt. Durch einen weiteren planaren Spiegel bei $z = l$ wird ein zweiter Resonator gebildet, der vorerst nur mit Luft gefüllt ist.

Für die Herleitung der Bewegungsgleichung wird die Feldkonfiguration in den Resonatoren wieder durch laufende Wellen in der Näherung der langsam vari-

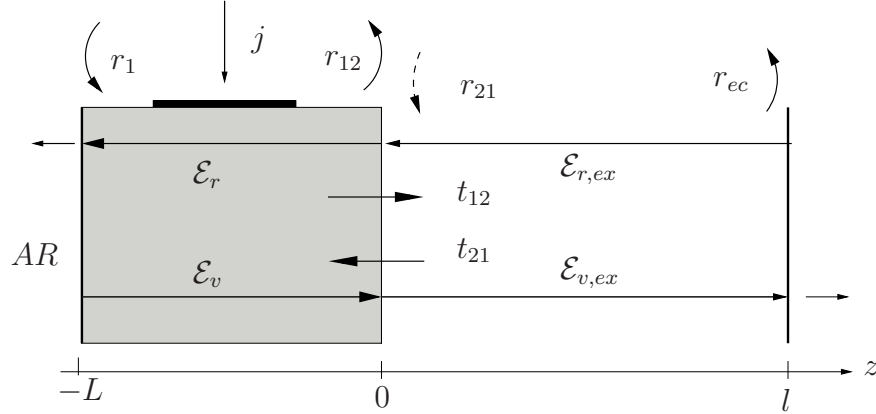


Abbildung 4.1.: Modell des Fabry-Perot-Resonators für die Herleitung des LK-Modells. Eingezeichnet sind die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sowie die Amplituden der betrachteten laufenden Wellen. Der gestrichelte Pfeil deutet eine in dem LK-Modell vernachlässigte Reflexion an.

ierenden Amplitude (vergleiche 2.6) beschrieben. Diese sind auf die Wurzel der Photonendichte normiert. Es gilt analog zu (3.23)

$$E(z, t) = \left\{ \mathcal{E}_v(z, t) + \mathcal{E}_r(z, t) \right\} e^{-i\omega t} + k.k. \quad \text{für } -L \leq z \leq 0 \quad (4.1a)$$

$$E_{ex}(z, t) = \left\{ \mathcal{E}_{v,ex}(z, t) + \mathcal{E}_{r,ex}(z, t) \right\} e^{-i\omega t} + k.k. \quad \text{für } 0 \leq z \leq l. \quad (4.1b)$$

Dabei sind langsam variierenden Amplituden durch

$$\mathcal{E}_{v,ex}(z, t) = \mathcal{E}_{v,ex}(0, t) e^{ik_0 z} \quad (4.2a)$$

$$\mathcal{E}_{r,ex}(z, t) = \mathcal{E}_{r,ex}(l, t) e^{ik_0(l-z)} \quad (4.2b)$$

$$\mathcal{E}_v(z, t) = \mathcal{E}_v(-L, t) e^{ik(z+L)} e^{(g_{opt} - \kappa_{int})(z+L)} \quad (4.2c)$$

$$\mathcal{E}_r(z, t) = \mathcal{E}_r(0, t) e^{-ikz} e^{-(g_{opt} - \kappa_{int})z} \quad (4.2d)$$

gegeben. Wie beim Fall ohne Rückkopplung sind die Amplituden durch folgende Randbedingungen an den äußeren Facetten miteinander verknüpft

$$\mathcal{E}_v(-L, t) = r_1 \mathcal{E}_r(-L, t) \quad \mathcal{E}_{r,ex}(l, t) = r_{ec} \mathcal{E}_{v,ex}(l, t).$$

Für die Reflexion an der inneren Facette bei $z = 0$ gilt zum einen

$$\mathcal{E}_r(0, t) = r_{12} \mathcal{E}_v(0, t) \quad \mathcal{E}_{v,ex}(0, t) = r_{21} \mathcal{E}_{r,ex}(0, t).$$

Zum anderen müssen noch die Beiträge von Wellen beachtet werden, die die externe Kavität $n = 1, 2, 3, \dots$ durchlaufen, bevor sie wieder in die Laserdiode transmittiert werden. Im Folgenden wird die Umlaufzeit in der externen Kavität mit $\tau_{ec} = 2l/c$ bezeichnet. Die Phasenverschiebung Θ bei einem Umlauf ergibt sich wie bei der Herleitung der Schwellwertbedingung (3.27) zu

$$\Theta = 2k_0 l = \frac{2l\omega}{c} = \omega \tau_{ec}.$$

Für die folgende Herleitung wird noch die Rückkopplungsstärke

$$K_{ec} = t_{12}t_{21}\frac{r_{ec}}{r_{12}} \quad (4.3)$$

eingeführt, die ein wichtiger Parameter für die Untersuchung von Rückkopplungseffekten ist. Wenn nun die Beiträge Umlauf für Umlauf aufsummiert werden, ergibt sich die rückwärtspropagierende Welle an der Stelle $z = 0$ zu einem Zeitpunkt t zu

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r(t) &= r_{12} \left\{ \mathcal{E}_v(t) + t_{12}t_{21}\frac{r_{ec}}{r_{12}}e^{i\theta}\mathcal{E}_v(t - \tau_{ec}) \right. \\ &\quad \left. + K_{ec}(r_{21}r_{ec})^1e^{i2\theta}\mathcal{E}_v(t - 2\tau_{ec}) + \dots \right\} \\ &= r_{12} \left\{ \mathcal{E}_v(t) + K_{ec}e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (r_{21}r_{ec})^n e^{in\theta} \mathcal{E}_v(t - (n+1)\tau_{ec}) \right\} \\ &= r_{12,ef}E_v(t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

In dem letzten Schritt wurde noch durch

$$r_{12,ef} = r_{12} \left\{ 1 + K_{ec}e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (r_{21}r_{ec})^n e^{in\theta} \frac{\mathcal{E}_v(t - (n+1)\tau_{ec})}{\mathcal{E}_v(t)} \right\} \quad (4.5)$$

ein effektiver Reflexionskoeffizient an der Facette bei $z = 0$ eingeführt. Dieser trägt der Rückkopplung Rechnung. Werden wie zuvor wieder alle Brechungsindizes als reell angenommen, folgt unter Beachtung, dass $r_{21} = -\sqrt{R_2}$ eine Reflexion am optisch dichteren Medium darstellt, aus (4.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r(t) &= \sqrt{R_2} \left\{ \mathcal{E}_r(t) \right. \\ &\quad \left. + K_{ec}e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{R_2 R_{ec}} \right)^n e^{in\theta} \mathcal{E}_v(t - (n+1)\tau_{ec}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Eine Näherung des LK-Modells besteht darin nur einen Umlauf des Lichts in der externen Kavität zu betrachten, das heißt, alle Terme in (4.6) von der Ordnung $n \geq 1$ in $(\sqrt{R_2 R_{ec}})^n$ zu vernachlässigen. Dafür muss $\sqrt{R_2 R_{ec}} \ll 1$ gelten. Diese Näherung beinhaltet sowohl den Grenzwert schwacher Rückkopplung $\sqrt{R_{ec}} \ll \sqrt{R_2}$ als auch den starker Rückkopplung $\sqrt{R_2} \ll \sqrt{R_{ec}}$. Die schnellste Möglichkeit die Feldgleichung des LK-Modells herzuleiten, besteht nun darin die Differenzgleichung aus (3.38b) durch geschickte Addition einer Null in eine Form zu bringen, in der sie leicht auf den Fall externer Rückkopplung verallgemeinert werden kann [TAR95a]:

$$\mathcal{E}_v(t + \tau_{in}) = G_1 \mathcal{E}_v(t) = G_1 \left\{ \mathcal{E}_v(t) + \underbrace{\frac{\mathcal{E}_r(t)}{\sqrt{R_2}} - \mathcal{E}_v(t)}_0 \right\}. \quad (4.7)$$

Wenn nun (4.6) in der Näherung, dass Terme mit $n \geq 1$ vernachlässigt werden, in (4.7) eingesetzt wird, ergibt sich folgende Differenzengleichung, die die Dynamik der Laserdiode mit externer Rückkopplung beschreibt

$$\mathcal{E}_v(t + \tau_{in}) = G_1 \{ \mathcal{E}_v(t) + K_{ec} e^{i\Theta} \mathcal{E}_v(t - \tau_{ec}) \}. \quad (4.8)$$

Bei diesem Ansatz wird angenommen, dass sich der Umlaufgewinn G_1 durch die Rückkopplung nicht verändert, was insbesondere im Fall starker Rückkopplung $\sqrt{R_2} \ll \sqrt{R_{ec}}$ eine sehr fragwürdige Näherung ist. Dies wird in dem nächsten Abschnitt noch genauer diskutiert werden. Wenn nun zusätzlich, analog zu dem Fall ohne Rückkopplung (3.39), angenommen wird, dass sich $\mathcal{E}_v(t)$ nur wenig während τ_{in} ändert, kann die Differenzengleichung (4.8) wieder durch eine gewöhnliche Differentialgleichung angenähert werden

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{\tau_{in}} \left\{ G_1 [\mathcal{E}(t) + K_{ec} e^{i\Theta} \mathcal{E}(t - \tau_{ec})] - \mathcal{E}(t) \right\}. \quad (4.9)$$

In der letzten Gleichung wurde der Index v unterdrückt. Da der Betrag des Umlaufgewinns G_1 wieder nur wenig größer als Eins ist, kann er durch $G_1 \approx 1 + \ln(G_1)$ genähert werden. Damit nimmt die Differentialgleichung (4.9) die Gestalt

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{\tau_{in}} \left\{ \ln(G_1) \mathcal{E}(t) + K_{ec} e^{i\Theta} \mathcal{E}(t - \tau_{ec}) + \ln(G_1) K_{ec} e^{i\Theta} \mathcal{E}(t - \tau_{ec}) \right\} \quad (4.10)$$

an. Der Vergleich von dieser Gleichung mit (3.41b) zeigt, dass der erste Term auf der rechten Seite die Ratengleichung für das elektrische Feld ohne Rückkopplung liefert. Die beiden anderen Terme werden durch die Rückkopplung hervorgerufen. Um das LK-Modell zu erhalten, muss der dritte Term auf der rechten Seite von (4.9) gegenüber den anderen Beiden vernachlässigt werden können. Dies bedeutet, dass für die Rückkopplungsstärke

$$K_{ec} = (1 - R_2) \frac{R_{ec}}{R_2} \ll 1$$

gelten muss. Schließlich wird noch angenommen, dass die Kreisfrequenz ω der sich mit Rückkopplung ausbildenden Mode nur geringfügig von der Kreisfrequenz ω_{th} der Trägerwelle $e^{-i\omega_{th}t}$ der Diode ohne Rückkopplung abweicht [PET88]. So kann die Phasenverschiebung gleich $\Theta = \omega_{th} \tau_{ec}$ gesetzt werden kann. Damit erhalten wir die zu dem ursprünglichen LK-Modell ähnlichen Gleichungen

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = (1 - i\alpha) \Gamma G_{nth} (n - n_{th}) \mathcal{E}(t) + \frac{K_{ec}}{\tau_{in}} e^{i\omega_{th} \tau_{ec}} \mathcal{E}(t - \tau_{ec}) \quad (4.11a)$$

$$\dot{n}(t) = \frac{j(t)}{ed} - \frac{1}{\tau_c(n(t))} n(t) - 2 \left(\frac{1}{\Gamma \tau_{ph}} + G_{nth} (n(t) - n_{th}) \right) \frac{|\mathcal{E}(t)|^2}{V_{akt}}. \quad (4.11b)$$

4.2. Grenzen des Lang-Kobayashi-Modells

In diesem Abschnitt werden die bei der Herleitung des LK-Modells gemachten Annahmen und die damit verbundenen Einschränkungen für dessen Gültigkeit zusammengefasst.

Zuerst wurde die Annahme gemacht, dass sich in der Laserdiode nur eine longitudinale Mode mit der Frequenz ω ausbildet. Über die transversalen (orthogonal zur aktiven Schicht) und lateralen (parallel zur aktiven Schicht) Moden wird räumlich gemittelt. Dies ergibt bei einer genaueren Behandlung den optischen Füllfaktor Γ . Die Ein-Moden-Annahme bedeutet bei der betrachteten Laserstruktur keine große Einschränkung, da die Kantenlänge des Resonators in der Ebene orthogonal zu Ausbreitungsachse (xy -Ebene in Abb. 3.3) nur vier Mikrometer beträgt [KUN05c] und damit von der Größenordnung der Wellenlänge $\lambda = 1.3\mu\text{m}$ ist. Daher können sich nur wenige laterale und transversale Moden ausbilden. Damit auch mit Rückkopplung die Annahme der Einmodigkeit ihre Gültigkeit behält, muss der Modenabstand in dem internen Resonator $\Delta\omega_{th} = 2\pi/\tau_{in} = \pi c/L\bar{\mu}$ groß gegenüber dem des externen Resonators $\Delta\omega_{ec,th} = 2\pi/\tau_{ec} = \pi c/L$ sein [TAG93]. Die optische Weglänge in der Laserdiode muss also klein gegenüber der optischen Weglänge in der internen Kavität sein

$$\bar{\mu}L \ll l.$$

Bei dem Übergang von der Differenzgleichung (4.8) zu der Differentialgleichung (4.9) wurde angenommen, dass sich während der Umlaufdauer des Lichts in der internen Kavität τ_{in} die langsam veränderliche Feldamplitude \mathcal{E} nur wenig verändert. Dies ist nur gültig, wenn die Umlaufzeit in der inneren Kavität klein gegenüber der Umlaufzeit in der äußeren Kavität ist oder die Rückkopplung so schwach ist, dass sie nur vernachlässigbaren Einfluss auf die Feldkonfiguration im Laser hat. Ein verallgemeinertes Modell kann aufgestellt werden, indem die Feldgleichung in der Form der Differenzgleichung (4.8) behandelt wird. Zusätzlich können beliebig viele Reflexionen in der externen Kavität betrachtet werden. Das so entstandene Modell lässt sich auch leicht auf den Fall mehrerer aktiver Moden erweitern. Es eignet sich besser als das LK-Modell für die Beschreibung mittlerer bis starker Rückkopplungsstärken ($K_{ec}^2 \geq -10\text{dB}$) [KAN05].

In der im letzten Abschnitt präsentierten Herleitung wurde angenommen, dass sich die Umlaufverstärkung G_1 (3.34) für die elektrische Feldamplitude \mathcal{E} durch die Rückkopplung nicht ändert. Diese sehr strikte Annahme kann noch etwas abgeschwächt werden. Dazu betrachten wir nun noch eine andere Herleitung der LK-Feldgleichung (4.11), die fast identisch mit der von Lang und Kobayashi gewählt ist. Es wird sich aber auch bei diesem Ansatz zeigen, dass das LK-Modell nur für kleine Änderungen der Umlaufverstärkung und damit für kleine Rückkopplungsstärken K_{ec} gültig ist. Für die Anordnung aus gekoppelten Resonatoren (siehe Abb. 4.1) stellen sich bei endlicher Kopplung $K_{ec} \neq 0$ andere Resonanzfrequenzen ein. Durch die sich ebenfalls veränderten Spiegelverluste, wird auch die Schwellwertverstärkung beeinflusst. Analog zu (3.25) gilt für den

gekoppelten Resonator die Schwellwertbedingung

$$1 = r_1 r_{12,ef} e^{2ikL} e^{2L(g_{opt} - \kappa_{int})}.$$

Der in (4.5) eingeführte effektive Reflexionskoeffizient nimmt in Polarkoordinaten die Gestalt

$$r_{12,ef} = |r_{12,ef}| e^{i\phi_{ec}} \quad (4.12)$$

an. Dabei ist ϕ_{ec} seine Phase. Die Schwellwertverstärkung ergibt sich für beliebige Rückkopplungsstärken zu

$$g_{opt,th} = \kappa_{int} + \frac{1}{2L} \ln \left(\frac{1}{|r_1| |r_{12,ef}|} \right). \quad (4.13)$$

Die Resonanzfrequenzen sind aus der Phasenbedingung (vergleiche (3.27))

$$2kL + \phi_1 + \phi_2 + \phi_{ec} = m2\pi \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

errechenbar. Die Umlaufverstärkung G_1 der Feldamplitude \mathcal{E} ergibt sich völlig analog zu (3.34), nur dass r_2 durch $r_{12,ef}$ ersetzt werden muss. Unter der Annahme, dass $|G_1| \approx 1$ ist, ergibt sich wie in (3.41b) folgende noch für beliebige Rückkopplungsstärken gültige Differentialgleichung [ABD03]:

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{\tau_{in}} \ln(G_1) \mathcal{E}(t) \quad (4.14a)$$

$$= v_g \left\{ g_{opt}(n(t)) - \kappa_{int} - \frac{1}{2L} \ln \left(r_1 r_{12,ef} \right) \right. \quad (4.14b)$$

$$\left. + i \frac{\omega_{th}}{c} \frac{\partial \mu'}{\partial n} \Big|_{th} (n(t) - n_{th}) \right\} \mathcal{E}(t) \quad (4.14c)$$

$$= v_g \left\{ g_{opt}(n(t)) - \kappa_{int} - \frac{1}{2L} \ln \left(\sqrt{R_1 R_2} \right) \right. \quad (4.14d)$$

$$\left. - \frac{1}{2L} \ln \left(\frac{r_{12,ef}}{\sqrt{R_2}} \right) + i \frac{\omega_{th}}{c} \frac{\partial \mu'}{\partial n} \Big|_{th} (n(t) - n_{th}) \right\} \mathcal{E}(t) \quad (4.14e)$$

Ab (4.14d) wurden die Reflektionskoeffizienten wieder als reell angenommen, so dass

$$r_1 = \sqrt{R_1}, \quad r_{12} = \sqrt{R_2}, \quad r_{21} = -\sqrt{R_2} \quad \text{und} \quad r_{ec} = \sqrt{R_{ec}}$$

gilt. Der Logarithmus in (4.14e) (rot eingefärbt) beschreibt die durch die Rückkopplung hervorgerufenen Veränderungen. Ohne Rückkopplung ist das Argument des Logarithmus Eins und es ergibt sich die bereits von dem Fall ohne Rückkopplung bekannte Ratengleichung (3.59a) für die elektrische Feldamplitude \mathcal{E} . Wenn nur ein Umlauf in der externen Kavität betrachtet wird, nimmt der Logarithmus die Form

$$\ln \left(\frac{r_{12,ef}}{\sqrt{R_2}} \right) \approx \ln \left(1 + K_{ec} e^{i\theta} \frac{\mathcal{E}(t - \tau_{ec})}{\mathcal{E}(t)} \right)$$

an. Um das LK-Modell zu erhalten, wird der komplexe Logarithmus in eine Laurentreihe um Eins entwickelt und die Reihenentwicklung nach dem ersten Glied abgebrochen. Da der komplexe Logarithmus nur in der geschlitzten komplexen Ebene (ohne den Ursprung und die negative reelle Achse) in einer konvergenten Potenzreihe entwickelbar ist, muss der Betrag des Rückkopplungstermes kleiner als Eins sein. Damit die Reihe nach dem ersten Glied abgebrochen werden kann, muss

$$\left| K_{ec} e^{i\Theta} \frac{\mathcal{E}(t - \tau_{ec})}{\mathcal{E}(t)} \right| = |K_{ec}| \left| \frac{\mathcal{E}(t - \tau_{ec})}{\mathcal{E}(t)} \right| \ll 1$$

gelten. Da diese Ungleichung insbesondere bei stationärer Feldkonfiguration $\mathcal{E}(t - \tau_{ec}) = \mathcal{E}(t)$ in dem Laser gelten soll, erhält man als notwendige Abbruchbedingung, dass K_{ec} betraglich kleiner als Eins sein muss

$$|K_{ec}| \ll 1.$$

Diese Herleitung zeigt, dass das LK-Modell die erste Ordnung einer Reihenentwicklung der Spiegelverluste

$$\frac{1}{2L} \ln \left(\frac{1}{r_1 r_{12,ef}} \right)$$

um die Spiegelverluste der Laserdiode ohne Rückkopplung ist und somit nur für schwache Rückkopplungen gültig ist. Die Gleichungen (4.14) stellen ein erweitertes Modell dar, mit dem auch beliebige Rückkopplungsstärken behandelt werden können [ABD03].

4.3. Halbleiterlaser mit integriertem passiven Resonator

Für technische Anwendungen sind kostengünstige, direktmodulierte Halbleiterlaser von besonderem Interesse. In diesen wird optische Rückkopplung durch eine kurze passive Sektion erreicht, die ebenfalls aus Halbleitermaterial besteht. Dadurch wird eine sehr kompakte Bauweise ermöglicht. In Abb. 4.2 ist eine Skizze einer Zwei-Sektionsstruktur bestehend aus einer aktiven und einer passiven Sektion dargestellt. Die Phase Θ , mit der das Licht nach einem Umlauf in der passiven wieder in die aktive Sektion eingespeist wird, kann durch einen Phasenstrom eingestellt werden. Dieser verändert den Brechungsindex μ'_{ec} in der passiven Sektion und damit die optische Weglänge des Lichts [RAD07]. Aufgrund der Verluste in dem Halbleitermaterial sind die passiven Sektionen integrierter Strukturen nur wenige Millimeter lang. In diesem Bereich „kurzer Kavitäten“ reagieren Halbleiterlaser weniger sensibel auf Rückkopplung als bei langen Kavitäten [KAN05, SCH89h, JON01]. Im Rahmen des LK-Modells wird

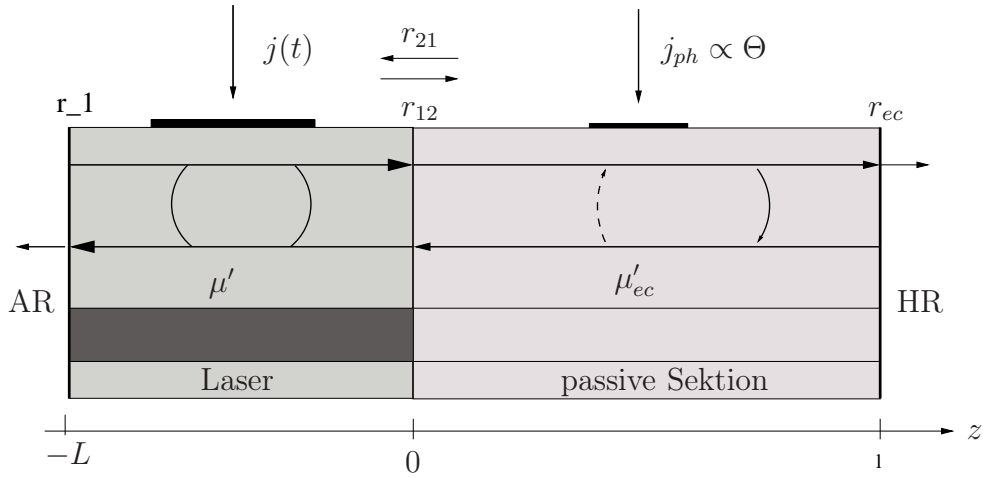


Abbildung 4.2.: Skizze der betrachteten Zwei-Sektionsstruktur. Die Facette der aktiven Sektion ist antireflektierend (AR) beschichtet, die der passiven Sektion hochreflektierend (HF). Bezeichnungen sind wie im Text.

dies dadurch erklärt, dass bei kurzen Kavitäten auch bei großen Rückkopplungsstärken K_{ec} nur wenige Eigenmoden der gekoppelten Kavität, sogenannte externe Resonatormoden, existieren [PET88]. Bei langen externen Kavitäten sind hingegen bereits bei geringer Rückkopplungsstärke viele Moden aktiv. Auf die externen Resonatormoden sowie die Definition einer kurzen Kavität werden wir in Kapitel 8 noch genauer eingehen. Da das LK-Modell auch das Verhalten von Halbleiterlasern mit kurzen externen Kavitäten von wenigen Zentimetern Länge gut beschreibt [HEI01a, HEI03a, TAG93, TAG94], liegt es nahe zu untersuchen, inwiefern auch integrierte Strukturen mit diesem Modell beschrieben werden können. Im Fall einer integrierten Struktur unterscheiden sich die Brechungsindizes des Materials der aktiven Sektion (z.B. InGaAs) und des Materials der passiven Sektion (z.B. GaAs) nur geringfügig voneinander. Deshalb wird an der Grenzschicht zwischen der aktiven und der passiven Sektion nur ein sehr kleiner Teil des Lichts reflektiert ($r_2^2 = R_2 \sim 1/1000$). Der dominierende Anteil des reflektierten Lichts stammt folglich von der Reflexion an der äußeren Grenzschicht der passiven Sektion ($r_{ec}^2 = R_{ec} \sim 0.3$). Der Einfluss der passiven Sektion auf die Laserdiode lässt sich wieder durch einen effektiven Reflexionskoeffizienten $r_{12,ef}$ der mittleren Facette ausdrücken, der nun motiviert wird. Bei jedem Umlauf in der externen Kavität wird die Amplitude der Welle um den Faktor

$$e^{-2\kappa_{int,ec}l}$$

abgeschwächt. Hierbei steht $\kappa_{int,ec}$ für die Verluste in der passiven Sektion. Diese stimmen ungefähr mit den Verlusten in der aktiven Sektion $\kappa_{int} \sim 200\text{m}^{-1}$ überein. In dispersiven Materialien wird die Umlaufphase Θ durch die Phasengeschwindigkeit $v_{ph,ec}$ bestimmt, während die Umlaufzeit $\tau_{ec} = 2l/v_{g,ec}$ des Lichts in der Kavität durch die Gruppengeschwindigkeit $v_{g,ec}$ bestimmt wird. So ergibt

sich die Umlaufphase zu

$$\Theta = \omega_{th} \frac{2l\mu'_{ec}}{c}.$$

Damit folgt für den effektiven Reflektionskoeffizienten (vergleiche [TRO06])

$$r_{12,ef} = \sqrt{R_2} \left\{ 1 + K_{ec} e^{-2\kappa_{int,ec} l} e^{i\Theta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{R_2 R_{ec}})^n e^{in\Theta} \frac{\mathcal{E}(t - (n+1)\tau_{ec})}{\mathcal{E}(t)} \right\}. \quad (4.15)$$

Ein Vergleich mit (4.3) zeigt, dass die Rückkopplungsstärke K_{ec} übergeht in

$$\tilde{K}_{ec} = \underbrace{(1 - R_2) \sqrt{\frac{R_{ec}}{R_2}}}_{\sim 10} e^{-2\kappa_{int,ec} l}. \quad (4.16)$$

Mehrfachreflexionen in der externen Kavität können in (4.15) vernachlässigt werden, da wir uns eindeutig in dem Grenzfall starker Rückkopplung $|R_{ec}| \gg |R_2|$ befinden.

An der Formel für die Rückkopplungsstärke (4.16) lässt sich bereits erkennen, dass es problematisch ist eine integrierte Struktur mit dem LK-Modell zu beschreiben: Wie wir in Abschnitt 4.2 gesehen haben, muss für dessen Gültigkeit der Betrag von \tilde{K}_{ec} klein gegenüber Eins sein. Der die Reflexionsverluste beschreibende Term (in (4.16) unterklammert) ist von der Größenordnung 10. Er muss durch die Umlaufverluste in der passiven Sektion $e^{-2\kappa_{int,ec} l}$ ausgeglichen werden. Dafür dürfen nur noch wenige Hundertstel des ausgekoppelten Lichts wieder in die interne Kavität zurückgekoppelt werden. Da kaum Licht direkt in den Laser zurückreflektiert wird, sind die Spiegelverluste zu hoch, um durch den optischen Gewinn kompensiert werden zu können (vergleiche (4.13)). Das LK-Modell liefert jedoch auch für relativ hohe Rückkopplungsstärken ($K_{ec} \approx 0.3$, $K_{ec}^2 \approx -10\text{dB}$), die typisch für integrierte Multisektionslaser sind [USH04], gut mit dem Experiment übereinstimmende Ergebnisse. (In Experimenten wird meistens der Anteil der rückgekoppelten Intensität angegeben, der in unserem Modell mit K_{ec}^2 beschrieben wird.) Daher kann versucht werden, das Verhalten von Mehrsektionslasern durch das LK-Modell mit Rückkopplungsstärken an dessen Gültigkeitsgrenze ($K_{ec} \approx 0.3$) zu beschreiben [TAG94, TAG93].

5. Ratengleichungsmodell für einen Quantenpunktlaser

In diesem Kapitel wird ein für einen Quantenpunktlaser (QP-Laser) geeignetes Ratengleichungsmodell vorgestellt. Dazu wird in Abschnitt 5.1 zuerst auf die Struktur der Laserdiode eingegangen und anschließend in Abschnitt 5.2 das Ratengleichungssystem behandelt.

5.1. Laserstruktur

Es wird eine kantenemittierende Laserdiode mit einem schmalen $4\ \mu\text{m}$ breiten Wellenleiter betrachtet. Eine Prinzips-Skizze ist in Abb. 5.1 wiedergegeben. Die gesamte Struktur ist auf einem n -dotierten Substrat aus GaAs gewach-

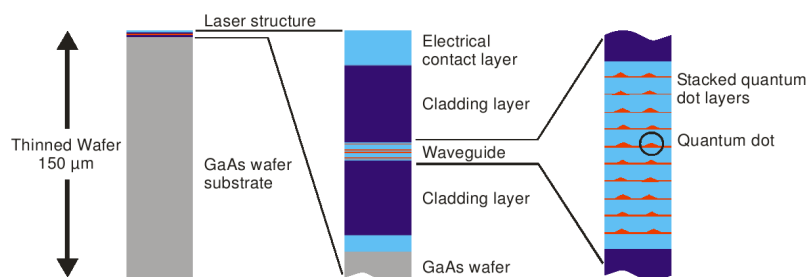


Abbildung 5.1.: Schematischer Aufbau einer QP-Laserstruktur. Abbildung entnommen aus [KUN05c].

sen. Auf dieses ist eine Mantelschicht aus AlGaAs von $1\ \mu\text{m}$ Dicke aufgebracht. Diese gewährleistet zusammen mit ihrem Pendant oberhalb der aktiven Zone und der aktiven Zone selber den Einschluss der optischen Mode orthogonal zu der Schichtung (siehe auch Kapitel 2.4). Die aktive Zone besteht aus 15 Lagen mit selbstorganisierten InAs-Quantenpunkten, die in $4\ \text{nm}$ dicke InGaAs-Benetzungsschichten eingebettet sind (siehe Kapitel 2.2.1). Die einzelnen Lagen sind mit $35\ \text{nm}$ dicken GaAs-Zwischenschichten getrennt, um eine Kopplung der Energieniveaus von Quantenpunkten verschiedener Schichten zu vermeiden und eine spannungsfreie GaAs-Oberfläche für das Aufwachsen der nächsten Benetzungsschicht zu erhalten.

5.2. Ratengleichungen

In dem Modell werden die Elektronen erst in einen Quantengraben aus InGaAs injiziert, der als Benetzungsschicht bezeichnet wird. Durch Coulombstreuung gelangen sie dann in die Quantenpunkte aus InAs. Die zugehörigen Einstreu- und Ausstreuraten werden mikroskopisch berechnet. Die Übereinanderschichtung von 15 Lagen mit Quantenpunkten wird in dem Modell durch den optischen Füllfaktor Γ (wie in Kapitel 2.4 beschrieben) beachtet. Da eine Ladungsträgerinversion nur bei hohen Ladungsträgerdichten in der Benetzungsschicht erreicht wird, kann angenommen werden, dass die Coulombstreuung über die Ladungsträger-Phonon-Streuung dominiert [WET04a]. Streuprozesse innerhalb der Benetzungsschicht und der Quantenpunkte sind deutlich schneller (\sim ps) als Streuprozesse zwischen den beiden Teilsystemen (\sim ns). Daher tragen nur die Elektronen- und Lochgrundzustände in den Quantenpunkten zu der Laserdynamik bei [MAL07]. Die Dynamik von Elektronen und Löchern in den Quantenpunkten und in der Benetzungsschicht wird getrennt betrachtet, daher gibt es vier Bewegungsgleichungen für die Ladungsträgerdichten: Zwei für die Elektronen- und Löcherdichten in den Quantenpunkten n_e und n_h sowie zwei für die entsprechenden Dichten in der Benetzungsschicht w_e und w_h . Eine fünfte Bewegungsgleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Photonendichte n_{ph} . Diese stellt eine Mittelung der Photonendichten aller longitudinalen Resonatormoden dar. Die Ladungsträgerdichten in den Quantenpunkten erhält man durch Summation über die Besetzungswahrscheinlichkeiten aller Quantenpunkte des Ensembles $\{\rho_{e,h}^i\}$ und anschließende Division durch die Fläche A der Benetzungsschicht:

$$n_{e,h} = \frac{1}{A} \sum_i \rho_{e,h}^i = N^{QD} \rho_{e,h}.$$

Dabei bezeichnet $\rho_{e,h}^i$ die Besetzungswahrscheinlichkeit des Elektronen- (e) beziehungsweise Lochniveaus (h) des i -ten Quantenpunktes. Die doppelte Quantenpunktdichte ist mit N^{QD} bezeichnet. Dabei wird die Degenerierung der Energieniveaus bezüglich des Spins beachtet. Die betrachtete Laserdiode hat eine Länge von $L = 1$ mm und der Wellenleiter hat einen Durchmesser von $4 \mu\text{m}$. Damit ergibt sich die Fläche der Benetzungsschicht zu $A = 4 \cdot 10^5 \text{ cm}^2$.

Aufgrund der geringen Dicke der Benetzungsschicht sind die Energieniveaus der Ladungsträger orthogonal zu der Schichtung quantisiert. In der Ebene parallel zu der Schichtung (xy -Ebene) liegt ein zweidimensionales Elektronengas vor. Es bilden sich daher parabolische Energiesubbänder mit der Dispersionsrelation $E_{\mathbf{k}}^b = \hbar^2 |\mathbf{k}|^2 / 2m_b^*$. Dabei ist m_b^* die effektive Masse der Ladungsträger ($b = e$ für Elektronen und $b = h$ für Löcher) und die Komponenten des zweidimensionalen Wellenvektors liegen in der xy -Ebene ($|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2$). Für die Verteilungsfunktionen der Ladungsträger in der Benetzungsschicht wird die Annahme gemacht, dass Intrabandstreuereprozesse genügend schnell gegenüber der Diffusion der injizierten Ladungsträger sind. Deshalb können wieder Quasi-Fermi-Verteilungen

für die einzelnen Bänder angenommen werden (vergleiche Kapitel 2.3). Für die Leitungsbandelektronen gilt:

$$f_{\mathbf{k}}^e = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_{\mathbf{k}}^e - E_{F_n}^n(T, w_e)}{k_B T}\right)}.$$

Dabei ist $E_{\mathbf{k}}^e$ die Einteilchenenergie der Elektronen und $E_{F_n}^n$ ihr Quasi-Fermi-Niveau. Die Ladungsträgerdichten in der Benetzungsschicht ergeben sich analog zu den Ladungsträgerdichten der Quantenpunkte zu

$$w_e = \frac{1}{A} \sum_{\mathbf{k}, s}^{\mathbf{k}_{1.BZ}} f_{\mathbf{k}}^e = \frac{2}{A} \sum_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}_{1.BZ}} f_{\mathbf{k}}^e = \int_0^{E_{1.BZ}} dE D_{2D} f^e(E) \quad (5.1a)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\mathbf{k}_{1.BZ}} dk k \left[\exp\left(\frac{E_{\mathbf{k}}^e - E_{F_n}^n(T, w_e)}{k_B T}\right) \right]^{-1}. \quad (5.1b)$$

Die Summe in 5.1a verläuft über alle Wellenvektoren bis zu dem Rand $\mathbf{k}_{1.BZ}$ der ersten Brioullinzone. In der zweiten Gleichheit von 5.1a wurde benutzt, dass die Ladungsträgerverteilung spinunabhängig ist. Daher ergibt die Summation über die z -Komponente der Spins s nur den Vorfaktor zwei. Bei dem Übergang von der Summe zum Integral wurde die Energiezustandsdichte innerhalb eines Subbands $D_{2D} = m_e^*/\pi\hbar^2$ eingeführt. Bei bekannten Ladungsträgerdichten können aus dieser Gleichung die Quasi-Fermi-Niveaus der Benetzungsschichtelektronen E_{F_n} bestimmt werden. Dabei ist nur das erste Subband von Interesse, da die energetische Aufspaltung der Subbänder, aufgrund der geringen Höhe der Benetzungsschicht (4 nm), so groß ist, dass das nächste Subband energetisch bereits „im GaAs“ liegt. Für die Berechnung der Löcherdichte gilt ein analoger Zusammenhang.

Das Ratengleichungssystem hat die folgende Gestalt:

$$\dot{n}_{ph} = -\kappa n_{ph} + \Gamma W A(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph} + \beta \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h \quad (5.2a)$$

$$\dot{n}_e = -\frac{1}{\tau_e} n_e + S_e^{in} N^{QD} - W A(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph} - \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h \quad (5.2b)$$

$$\dot{n}_h = -\frac{1}{\tau_h} n_h + S_h^{in} N^{QD} - W A(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph} - \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h \quad (5.2c)$$

$$\dot{w}_e = \eta(w_e) \frac{j}{e_0} + \frac{n_e}{\tau_e} \frac{N^{WL}}{N^{QD}} - S_e^{in} N^{WL} - \frac{W}{N^{WL}} w_e w_h \quad (5.2d)$$

$$\dot{w}_h = \eta(w_e) \frac{j}{e_0} + \frac{n_h}{\tau_h} \frac{N^{WL}}{N^{QD}} - S_h^{in} N^{WL} - \frac{W}{N^{WL}} w_e w_h. \quad (5.2e)$$

Nachfolgend werden wir auf die einzelnen Terme und ihre Bedeutung eingehen. Die in den Simulationen und Rechnungen benutzen Zahlenwerte sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Ein Energieschema der untersuchten Struktur ist in Abb. 5.2 dargestellt.

Bezeichnung	Größe	Wert
$\hbar\omega$	Größe der Bandlücke (InAs)	0.96 eV
N^{QD}	Doppelte Quantenpunktdichte	$0.45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$
N^{WL}	Zelldichte der Benetzungsschicht	$2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$
A	Fläche der Benetzungsschicht	$4 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-2}$
κ	Gesamte Kavitätsverluste	0.12 ps^{-1}
κ_{int}	Interne Verluste	200 m^{-1}
$R_{1,2}$	Reflektivitäten der Facetten	0.32
Γ	Optischer Füllfaktor	0.0011, (0.0015)
a_L	Anzahl der Quantenpunktschichten	15
γ_{xy}	Grundfläche der Quantenpunkte	$3 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2$
L	Laserlänge	1 mm
W	Einsteinkoeffizient	1.3 ns^{-1}
μ	Dipolmoment	$0.28e_0 \text{ nm}$
T	Temperatur	300 K
β	Koeffizient der spontanen Emission	$5 \cdot 10^{-6}$
ϵ_{bg}	Dielektrizitätskonstante von GaAs	13.18

Tabelle 5.1.: In den Simulationen verwendete Parameter. Bis auf die Quantenpunktdichte N^{QD} stimmen alle Parameter mit [LUE08] überein.

Der erste Term in der Bewegungsgleichung für die Photonendichte (5.2a) beschreibt deren gesamte Verluste. Die Verlustrate κ setzt sich aus internen Verlusten κ_{int} und Spiegelverlusten $(2L)^{-1} \ln(R_1 R_2)$ zusammen. Es gilt

$$\kappa = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{\epsilon_{bg}}}}_{v_{ph}} \left\{ \kappa_{int} - \frac{1}{2L} \ln(R_1 R_2) \right\}.$$

Dabei sind die Reflektivitäten der Facetten der Laserdiode mit R_1 und R_2 bezeichnet. Sie haben für unbeschichtete Grenzflächen von *GaAs* mit Luft den Wert $R_1 = R_2 = 0.32$. Zusätzlich wurde die Phasengeschwindigkeit des Lichts in *GaAs* $v_{ph} = c/\sqrt{\epsilon_{bg}}$ eingeführt. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und $\epsilon_{bg} = 13.18$ die Dielektrizitätskonstante von *GaAs*. Der zweite Term auf der rechten Seite von (5.2a) beschreibt die Nettorate der induzierten Absorption und Emission R_{ind}

$$R_{ind}(n_e, n_h, n_{ph}) = WA(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph}. \quad (5.3)$$

Sie ist sowohl proportional zu der Photonendichte n_{ph} als auch zu der Inversionsdichte $n(t)$. Die Ladungsträgerinversion ist die Differenz aus der Elektronendichte in dem Leitungs- n_e und dem Valenzniveau $n_{e,v}$ der Quantenpunkte

$$n(t) = n_e - n_{e,v} = n_e + n_h - N^{QD}.$$

In der letzten Gleichung wurde ausgenutzt, dass zwischen der Löcherdichte und der Elektronendichte des Valenzniveaus der Quantenpunkte der Zusammenhang

$$n_h = N^{QD} - n_{e,v}$$

besteht. Die Rate der induzierten Absorption und Emission ergibt sich für einen Quantenpunkt zu

$$WA(\rho_e + \rho_h - 1)n_{ph}. \quad (5.4)$$

Dabei ist W der Einsteinkoeffizient, der ein Maß für die Stärke der strahlenden Übergänge in den Quantenpunkten ist. Er kann explizit zu

$$W = \frac{|\mu|^2}{3\pi\epsilon_0\hbar} \left(\frac{\omega}{v_{ph}}\right)^3$$

berechnet werden [MAL08].

Dabei ist μ das Dipolmoment des strahlenden Überganges, $\hbar = h/2\pi$ das reduzierte Plank'sche Wirkungsquantum und ω die Frequenz des strahlenden Überganges. Wird nun (5.4) über das Ensemble von Quantenpunkten aufsummiert und die Spin-Degenerierung beachtet, erhält man (5.3). Es wird angenommen, dass alle Quantenpunkte zu dem Laserübergang beitragen. Damit wird dessen inhomogenen Verbreiterung nicht direkt Rechnung getragen. Die inhomogene Verbreiterung kommt zum einen durch die statistische Verteilung der Quantenpunktgrößen zu Stande, die eine unterschiedlich starke Aufspaltung der Energieniveaus bewirkt. Zum anderen schwankt der Indiumgehalt der Quantenpunkte, was ebenfalls die Aufspaltung der Energieniveaus beeinflusst. Damit ist nur ein Teil der Quantenpunkte exakt in Resonanz mit der betrachteten Laserfrequenz ω . Statt eine Verteilungsfunktion für die Quantenpunktgrößen zu betrachten, wird in dieser Arbeit der Wert von $N^{QD} = 0.45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ kleiner als der experimentell gefundene $N_{\text{exp}}^{QD} = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ [KUN05c] gewählt. Die spontane Emission in den Quantenpunkten wird durch den Term

$$R_{sp}(n_e, n_h) = \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h \quad (5.5)$$

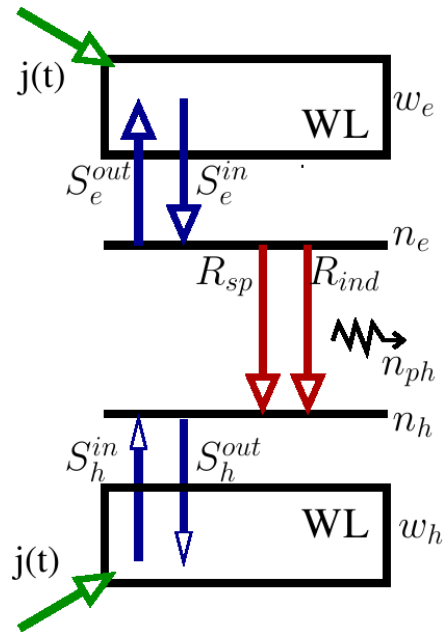


Abbildung 5.2.: Energieschema der untersuchten QP-Benetzungsschicht-Struktur. Entnommen aus [MAL08].

beschrieben. Als Licht-Materie-Wechselwirkung ist sie ebenfalls proportional zu dem Einsteinkoeffizienten W . Sie wird als bimolekulare Wechselwirkung beschrieben, ist also proportional zu dem Produkt aus Elektronen- und Löcherdichte in den Quantenpunkten [SCH84a, SCH88i]. Der Koeffizient β in der Gleichung für die Photonendichte n_{ph} beschreibt den Anteil der spontan emittierten Photonen, die zu der Lasermode beitragen. Er wird zu $5 \cdot 10^{-6}$ gewählt.

Streuprozesse von Ladungsträgern zwischen der Benetzungsschicht und den Quantenpunkten werden in den Ratengleichungen für die Ladungsträgerdichten (5.2b)-(5.2e) durch nichtlineare Streuraten $S_{e,h}^{in/out}$ beschrieben (vergleiche dazu Abb. 5.2). Auf ihre Berechnung werden wir in Abschnitt 5.2.1 genauer eingehen. Die Streuraten sind ein Maß für die Stärke der nichtstrahlenden Streuprozesse und bestimmen damit die Ladungsträgerlebensdauern in den Quantenpunktniveaus zu

$$\tau_{e,h} = (S_{e,h}^{in} + S_{e,h}^{out})^{-1}.$$

Die spontane Emission in der Benetzungsschicht wird in den Gleichungen (5.2d) und (5.2e) ebenfalls durch einen bimolekularen Term

$$\tilde{R}_{sp}(w_e, w_h) = \frac{W}{N^{WL}} w_e w_h$$

beschrieben. Aufgrund der starken Abschirmung durch das umgebene Elektronengas [WET04a] wird die Reichweite der Coulombwechselwirkung herabgesetzt. So finden Coulomb-Streuprozesse immer nur zwischen einem Quantenpunkt und einem umgebenen Stück der Benetzungsschicht mit der Fläche $A_{norm} = 2 \text{ nm} \times 2 \text{ nm}$ statt. Die Zahl der Energiezustände in der Benetzungsschicht pro A_{norm} ist mit N^{WL} bezeichnet.

Aus dem Gleichungssystem (5.2) ist ersichtlich, dass die Quantenpunkte nicht direkt gepumpt werden, sondern die Ladungsträger erst in den Quantengraben injiziert werden. Die Injektion von Ladungsträgern in die Benetzungsschicht wird durch den Term $\eta(w_e)j/e_0$ in den Gleichungen (5.2d) und (5.2e) beschrieben. Dabei ist j die Pumpstromdichte, e_0 die Elementarladung und

$$\eta(w_e) = 1 - \frac{w_e}{N^{max}} \quad (5.6)$$

der Stromeffizienzfaktor. Dieser beschreibt Auffüllungseffekte der Zustände in der Benetzungsschicht bei hohen Stromdichten. N^{max} ist die Zahl möglicher Zustände in der Benetzungsschicht. Eine mikroskopische Herleitung des Stromeffizienzfaktors findet sich in [CHO94].

5.2.1. Nichtlineare Streuraten

Eine Besonderheit des in diesem Kapitel betrachteten Ratengleichungsmodells sind die mikroskopisch berechneten Coulomb-Streuraten zwischen den kontinuierlichen Zuständen der Benetzungsschicht und den diskreten Zuständen der

Quantenpunkte $S_{e,h}^{in/out}$. Die Streuraten werden in Abhängigkeit von den Ladungsträgerdichten w_e und w_h in der Benetzungsschicht berechnet. Dabei finden über die Hartree-Fock-Näherung hinausgehend Zwei-Teilchen-Korrelationen Beachtung (Zweite Born Approximation). Anwendung der Markov-Approximation, das heißt die Vernachlässigung aller Gedächtniseffekte, führt zu einer Boltzmann-Gleichung für die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Quantenpunktniveaus [MAL08, MAL07]

$$\dot{\rho}_b = S_b^{in}(1 - \rho_b) - S_b^{out}\rho_b = - \underbrace{(S_b^{in} + S_b^{out})}_{\tau_b^{-1}} \rho_b + S_b^{in}. \quad (5.7)$$

Aufsummieren von (5.7) über das gesamte Quantenpunktensemble ($\frac{1}{A} \sum_i \cdot (5.7)$) liefert die durch die Coulomb-Streuung verursachten ersten beiden Terme in den Bewegungsgleichungen für n_e (5.2b) und n_h (5.2c). Der erste Term von Gleichung (5.7) besagt, dass die Änderung der Besetzungswahrscheinlichkeit durch Einstreuung mit zunehmender Besetzungswahrscheinlichkeit ρ_b des Niveaus abnimmt. Dies ist eine Folge des Pauli-Prinzips. Da Elektronen ununterscheidbare Fermionen sind, können sich nicht zwei von ihnen in dem gleichen Quantenzustand befinden. Daher nimmt die Einstreuung mit zunehmender Besetzungswahrscheinlichkeit des Niveaus ab. Abb. 5.3 zeigt die berechneten Streuraten für drei verschiedene Verhältnisse $g_c = w_h/w_e$ von Löcher zu Elektronendichte in der Benetzungsschicht. Die Streuraten der Elektronen sind über w_e aufgetragen und die Streuraten der Löcher über w_h . Aufgrund der gemischten Auger-Prozesse (Elektron-Loch-Streuung) sind alle Streuraten von w_e und w_h abhängig. Abb. 5.4 zeigt die bei der Berechnung der Streuraten betrachteten Auger-Einstreuprozesse. Dabei werden sowohl reine Elektron-Elektron- 5.4(a) und Loch-Loch-Streuung 5.4(c), als auch gemischte Elektron-Loch-Streuung

(5.4(b) und 5.4(d)) beachtet. Die Streuraten sind von der Form [GOM08, MAL08]

$$S_b^{in/out} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{lmmb'} M_{bmlm} \underbrace{(2M_{bmlm}^*}_{\text{dir. W.W.}} - \underbrace{\delta_{b,b'} M_{bnml}^*}_{\text{Aus.-W.W.}}) f_{lmnb'}^{in/out} \cdot \underbrace{\delta(E^b + E_n^{b'} - E_l^b - E_m^{b'})}_{\text{Energieerhaltung}}. \quad (5.8)$$

Die Summe in (5.8) läuft über alle Zustände der Benetzungsschicht mit den Besetzungswahrscheinlichkeiten ρ_l^b , ρ_m^b und ρ_n^b . Die Einteilchenenergiezustände in der Benetzungsschicht sind mit E_l^b , $E_m^{b'}$ und $E_n^{b'}$ bezeichnet, die Energiezustände in den Quantenpunkten mit E^b . M_{bmlm} bezeichnen die Coulomb-Matrixelemente der Streuprozesse. Dabei wird der Abschirmung durch das umgebene zweidimensionale Elektronengas in der Benetzungsschicht im Rahmen des zweidimensionalen statischen Grenzwertes der Lindhard-Gleichung [CHO94, MAL07] Rechnung getragen. Die δ -Distribution in (5.8) drückt die Energieerhaltung bei Coulomb-Streuprozessen aus. Die Coulombwechselwirkung beinhaltet einen direkten Term (erster Term auf der rechten Seite von (5.8)) und einen Austauschterm (zweiter Term auf der rechten Seite von (5.8)) beschrieben. Durch die Degenerierung der Energieniveaus in der Benetzungsschicht bezüglich des Spins führt die Summation über die Spinvariable zu dem Faktor zwei vor dem direkten Term. Die

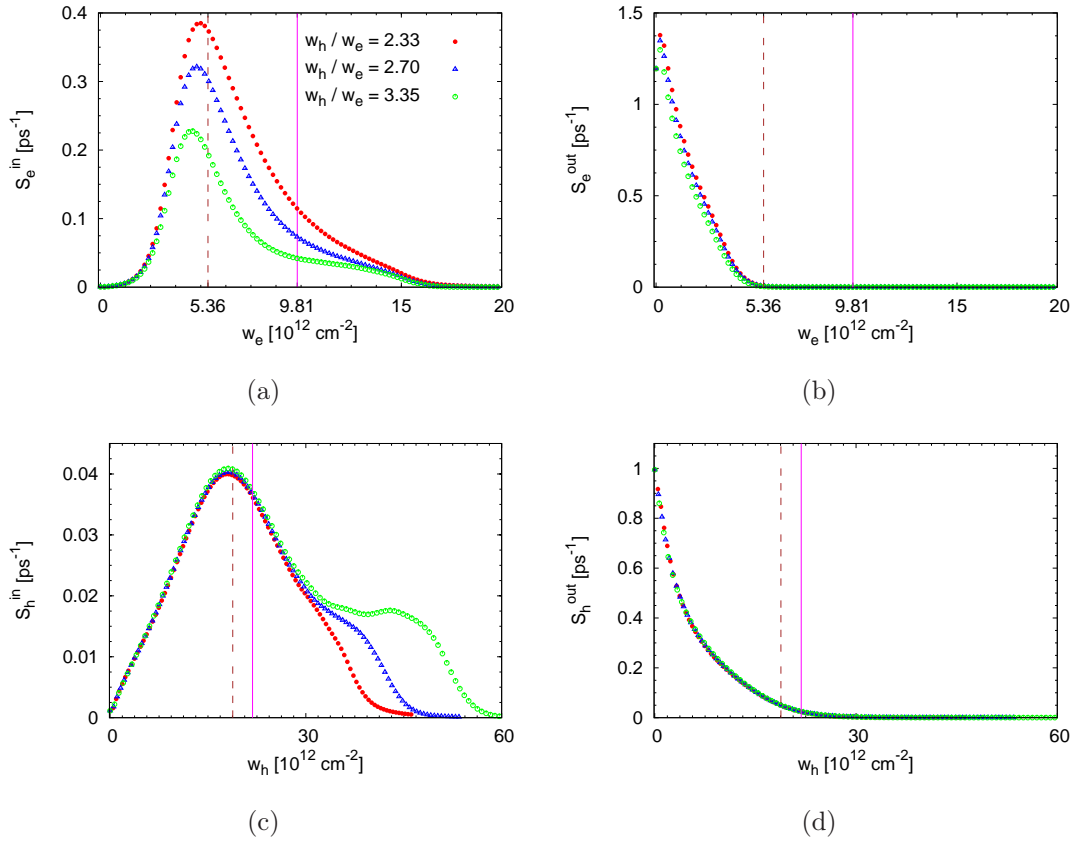


Abbildung 5.3.: Mikroskopisch berechnete Coulomb-Streuratens für Elektronen (e) und Löcher (h) in Abhängigkeit der Ladungsträgerdichten w_e und w_h in der Benetzungsschicht für drei verschiedene Verhältnisse $g_c = w_h/w_e$ von w_h und w_e . (a) und (b): Ein- (S_e^{in}) und Ausstreuratens (S_e^{out}) für Elektronen. (c) und (d): Ein- (S_h^{in}) und Ausstreuratens (S_h^{out}) für Löcher. Braune strichpunktierte Linien bezeichnen die Gleichgewichtsladungsträgerdichten für $\Gamma = 0.0015$ ($w_{e,s} = 5.36 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, $w_{h,s} = 18.80 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$), rosa durchgezogene Linien für $\Gamma = 0.0011$ ($w_{e,s} = 9.81 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, $w_{h,s} = 21.83 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$). Parameterwerte für die numerische Berechnung der Gleichgewichtsladungsträgerdichten: $j = 2.5 \cdot j_{th}(\Gamma)$, $\eta = 1$, $j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 3,708 \text{ Acm}^{-2}$, $j_{th}(\Gamma = 0.0015) = 2.407 \text{ Acm}^{-2}$. Andere Parameterwerte wie in Tabelle 5.1.

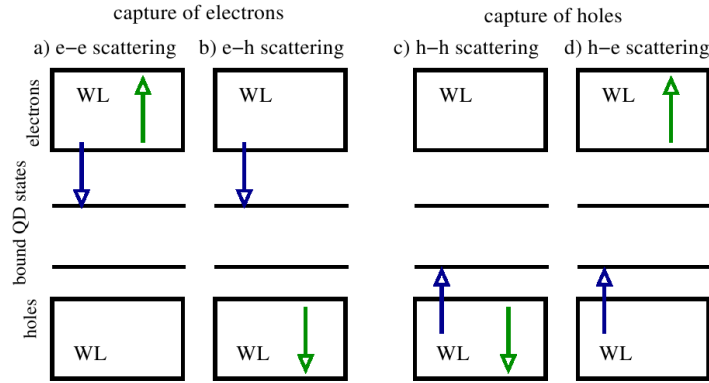


Abbildung 5.4.: Veranschaulichung der bei der Berechnung der Streuraten betrachteten Auger-Einstreuprozesse für Elektronen und Löcher. Es werden sowohl reine Elektron-Elektron- und Loch-Loch-Streuung (a) und (c), als auch gemischte Elektron-Loch-Prozesse (b) und (d) betrachtet. Entnommen aus [MAL08].

Terme $f_{lmnb'}^{in/out}$ enthalten die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Zustände in der Benetzungsschicht

$$f_{lmnb'}^{in} = \rho_l^b \rho_m^{b'} (1 - \rho_n^{b'}) \quad f_{lmnb'}^{out} = \rho_n^{b'} (1 - \rho_m^{b'}) (1 - \rho_l^b). \quad (5.9)$$

Die Einstreuratzen zeigen prononcierte Maxima bei einer Elektronendichte w_e von etwa $5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ für S_e^{in} und einer Löcherdichte w_h von etwa $19 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ für S_h^{in} . Zu höheren Dichten hin fallen sie monoton ab, wobei die Einstreuratzen für die Löcher S_h^{in} noch ausgeprägte Schultern bei Löcherdichten über $30 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ zeigen. Die Ausstreuratzen fallen hingegen in dem gesamten Bereich von $1 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ bis $20 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ im Fall von S_e^{in} und in dem Bereich von $1 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ bis $60 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ im Fall von S_h^{in} monoton ab.

An (5.9) lässt sich erkennen, warum die Ausstreuratzen $S_{e,h}^{out}$ in Abb. 5.3(b) und 5.3(d) bereits bei Ladungsträgerdichten $w_{e,h}$ abfallen, bei denen die Einstreuratzen $S_{e,h}^{in}$ in Abb. 5.3(a) und 5.3(c) noch ansteigen: Da die Ausstreuratzen proportional zu $(1 - \rho_m^{b'}) (1 - \rho_l^b)$ sind, macht sich bei ihnen das Auffüllen der Zustände in der Benetzungsschicht schneller bemerkbar als bei den Einstreuratzen, die „nur“ proportional zu $(1 - \rho_n^{b'})$ sind (vergleiche dazu Abb. 5.3(a) und 5.3(c) mit Abb. 5.3(b) und 5.3(d)). Um einen Eindruck von den im Laserbetrieb typischen Ladungsträgerdichten zu bekommen, sind in Abb. 5.3 die numerisch berechneten Gleichgewichtsladungsträgerdichten für das stark gedämpften Regime $\Gamma = 0.0011$ durch rosa Linien und für das oszillatorischen Regime $\Gamma = 0.0015$ durch braun strich-punktierte Linien gekennzeichnet. Die beiden Regime werden in Kapitel 7 näher beschrieben. Die Ausstreuratzen sind bei den Gleichgewichtsladungsträgerdichten bereits fast vollständig abgeklungen, während die Gleichgewichtswerte der Einstreuratzen für den oszillatorischen Fall ($\Gamma = 0.0015$) in der Nähe der Maxima der Einstreuratzen liegen. In dem stark gedämpften

Fall ($\Gamma = 0.0011$) liegen die Gleichgewichtswerte der Elektronen-Einstreuratzen „rechts“ von den Maxima der Streuratzen, also in dem Bereich abfallender Streuratzen. Die Löcher-Einstreuratzen liegen hingegen noch knapp „links“ von den Maxima der Streuratzen, also noch in dem Bereich ansteigender Streuratzen.

6. Zusammenfügen beider Modelle

In diesem Kapitel wird das in Kapitel 5 vorgestellte Ratengleichungsmodell mit dem in Kapitel 4 abgeleiteten LK-Modell kombiniert. Dabei entsteht ein Modell, in dem das elektrische Feld wie in dem LK-Modell durch eine komplexe langsam variierende Feldamplitude beschrieben wird. Die Ladungsträgerdynamik wird hingegen aus dem Ratengleichungsmodell übernommen. Dadurch können einerseits Effekte durch Rückkopplung eines Teils des Lichts beachtet werden. Andererseits kann die unterschiedliche Dynamik von Elektronen und Löchern, sowohl in den Quantenpunkten als auch in der Benetzungsschicht, beachtet werden. Das Modell ist also mikroskopisch exakter als das LK-Modell, das für Elektronen und Löcher die gleiche Dynamik annimmt. Außerdem sind die Ein- und Ausstreuraten mikroskopisch berechnet und müssen nicht durch angenäherte Raten beschrieben werden. In diesem Kapitel werden alle Dichten auf die Normierungsfläche der Benetzungsschicht A bezogen. Für die Herleitung des kombinierten Modells wird die Feldgleichung des LK-Modells in einer für allgemeine Gewinnraten $G(n) = v_g g(n)$ gültigen Form verwendet (vergleiche mit (3.59)):

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t) = & \left\{ -i(\omega - \omega_{th}) + \Gamma(G(n) - G_{th}) \right\} \mathcal{E}(t) \\ & + \frac{K_{ec}}{\tau_{in}} e^{i\Theta} \mathcal{E}(t - \tau_{ec}) + F_{\mathcal{E}}(t). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Die grundlegende Idee besteht nun darin, die komplexe Feldgleichung des LK-Modells (6.1) in Polarkoordinaten, das heißt durch eine Gleichung für die Photonendichte n_{ph} und eine Gleichung für die Phase ϕ zu beschreiben. Durch den Vergleich der Gleichungen für die Photonendichte beider Modelle kann der Term des Ratengleichungsmodells, der die Zuwachsrate der Photonendichte beschreibt

$$WA(n_e + n_h - N^{QD}),$$

in Verbindung mit dem optischen Gewinn g_{opt} des LK-Modells gebracht werden. Dabei gilt der folgende Zusammenhang zwischen der Inversionsdichte $n(t)$ in dem LK-Modell und den Ladungsträgerdichten in den Quantenpunkten in dem Ratengleichungsmodell:

$$n(t) = n_e - n_{e,v} = n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}.$$

Dies wird ersichtlich, wenn man beachtet, dass n_e die Elektronendichte in dem Leitungsband und n_h die Löcherdichte in dem Valenzband beschreibt. Diese ist mit der Elektronendichte in dem Valenzband $n_{e,v}$ über $n_h = N^{QD} - n_{e,v}$ verknüpft. Als nächstes wird der Koeffizient, des die spontane Emission in dem LK-Modell beschreibenden stochastischen Terms $F_{\mathcal{E}}(t)$, durch den Vergleich mit der Rate der spontanen Emission in dem Quantenpunkten

$$R_{sp}(n_e, n_h) = \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h$$

bestimmt. Dazu wird der stochastische Term von (6.1) als komplexes Gauß'sches weißes Rauschen

$$F_{\mathcal{E}}(t) = F_x(t) + iF_y(t),$$

mit den Mittelwerten

$$\langle F_{\mathcal{E}}(t) F_{\mathcal{E}}^*(t') \rangle = \check{R}_{sp} \delta(t - t') \quad \text{und} \quad \langle F_x(t) F_y(t') \rangle = \frac{\check{R}_{sp}}{2} \delta_{xy} \delta(t - t')$$

angesetzt (siehe Kapitel 3.6 und Appendix A). Der Koeffizient \check{R}_{sp} ist durch den Vergleich beider Modelle zu bestimmen. Die Notation \check{R}_{sp} wurde gewählt, um daran zu erinnern, dass es sich bei der gesuchten Größe um eine Rate (Einheit $1/\text{Zeit}$) handelt. Nun wird die komplexe Bewegungsgleichung für die bereits auf die Wurzel der Photonenzahl N_{ph} normierte Feldamplitude \mathcal{E} in zwei reelle Bewegungsgleichungen aufgespalten, eine für N_{ph} und eine für die Phase ϕ des elektrischen Feldes. Ohne stochastischen Term ist dies nur eine Transformation auf Polarkoordinaten, das heißt, \mathcal{E} wird als

$$\mathcal{E}(t) = \sqrt{N_{ph}(t)} e^{-i\phi(t)} \quad (6.2)$$

dargestellt. Unter Beachtung des die spontane Emission beschreibenden stochastischen Terms $F_{\mathcal{E}}(t)$ muss eine *Ito-Transformation* angewendet werden. Diese beschreibt die Transformation einer stochastischen Differentialgleichung auf andere Korrdinaten [GAR02]. Die Einzelheiten der Transformation finden sich in dem Anhang A. Ohne Rückkopplung ($K_{ec} = 0$) ergibt sich aus der komplexen stochastischen Differentialgleichung für die Feldamplitude \mathcal{E} (6.1) folgendes Paar entkoppelter reeller stochastischer Differentialgleichungen für die Photonendichte n_{ph} und die Phase ϕ (siehe (A.9))

$$\dot{n}_{ph} = 2\Gamma \left\{ G(n) - G_{th} \right\} n_{ph} + \frac{\check{R}_{sp}}{A} + F_{n_{ph}} \quad (6.3)$$

$$\dot{\phi} = (\omega - \omega_{th}) - F_{\phi}. \quad (6.4)$$

Dabei haben die beiden reelles weißes Rauschen beschreibenden Terme $F_{n_{ph}}$ und F_{ϕ} die Korrelationseigenschaften

$$\langle F_{n_{ph}}(t) F_{n_{ph}}(t') \rangle = 2\check{R}_{sp} n_{ph} \delta(t - t') \quad \text{und} \quad \langle F_{\phi}(t) F_{\phi}(t') \rangle = \frac{\check{R}_{sp}}{2A n_{ph}(t)} \delta(t - t').$$

Da der Beitrag der spontanen Emission in dem Ratengleichungsmodell nicht durch einen stochastischen Term beschrieben wird, muss für den Vergleich beider Modelle der Term $F_{n_{ph}}$ in (6.3) vernachlässigt werden. Zum direkten Vergleich werden die Differentialgleichungen für die Photonendichte in dem LK-Modell und in dem Ratengleichungsmodell gegenübergestellt:

$$\dot{n}_{ph} = 2\Gamma\{G(n) - G_{th}\}n_{ph} + \frac{\check{R}_{sp}}{A} \quad (6.5a)$$

$$\dot{n}_{ph} = \left\{ \Gamma W A (n_e + n_h - N^{QD}) - \kappa \right\} n_{ph} + \beta R_{sp}(n_e, n_h). \quad (6.5b)$$

Der Vergleich von (6.5a) mit (6.5b) ergibt, dass die Gewinnrate des LK-Modells an der Laserschwelle mit der halben Verlustrate des Ratengleichungsmodells übereinstimmt

$$G_{opt,th} = \Gamma G_{th} = v_g \Gamma g_{th} = v_g g_{opt,th} = \frac{\kappa}{2}. \quad (6.6)$$

So steht der optische Schwellwertgewinn $g_{opt,th}$ des LK-Modells in folgendem Zusammenhang mit den internen κ_{int} und den Spiegelverlusten $\frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)$ des Ratengleichungsmodells:

$$g_{opt,th} = \frac{1}{2} \frac{1}{v_g} \kappa = \frac{1}{2} \frac{1}{v_g} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{bg}}} \left\{ \kappa_{int} + \frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right) \right\} \quad (6.7a)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \kappa_{int} + \frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right) \right\}. \quad (6.7b)$$

In Gleichung (6.7b) wurde noch die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = c/\sqrt{\epsilon_{bg}}$ mit der Gruppengeschwindigkeit v_g in der aktiven Zone gleichgesetzt. Da in dem Ratengleichungsmodell Dispersion vernachlässigt wurde, ist dies keine Einschränkung. Zwischen der Gewinnrate des LK-Modells und der Inversionsdichte $n(t)$ in dem Ratengleichungsmodell ergibt sich folgender Zusammenhang

$$G(n(t)) = \frac{WA}{2} (n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}). \quad (6.8)$$

Dieser ist intuitiv verständlich, da das elektrische Feld nur bei einer Inversion der Ladungsträgerdichten in dem Halbleitermaterial verstärkt wird und der Einsteinkoeffizient W genau die Übergangsrate zwischen den beiden am strahlenden Übergang beteiligten Niveaus liefert. Umgeschrieben auf den Gewinn im LK-Modell ergibt sich

$$\boxed{g(n(t)) = \frac{WA\sqrt{\epsilon_{bg}}}{2c} (n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}).}$$

So lässt sich die Rate der induzierten Emission nun mit Hilfe der Gewinnrate G schreiben als

$$R_{ind}(n_e, n_h, n_{ph}) = 2G(n_e, n_h)n_{ph} = 2v_g g(n_e, n_h)n_{ph} = 2\frac{c}{\sqrt{\epsilon_{bg}}} g(n_e, n_h)n_{ph}.$$

Der Faktor zwei vor der Gewinnrate kommt wieder dadurch zu Stande, dass die Rate der induzierten Emission auf die Photonendichte bezogen ist, während die Gewinnrate G sich auf die Amplitude des Feldes bezieht. Auch die gesuchte Rate der spontanen Emission in dem LK-Modell \check{R}_{sp} kann nun durch Größen des Ratengleichungsmodells ausgedrückt werden

$$\check{R}_{sp}(n_e, n_h) = \beta A R_{sp}(n_e, n_h) = \beta A \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h.$$

Für die Einführung des α -Faktors in die Feldgleichung (6.1) muss $G(n)$ um den Schwellwert der Ladungsträgerinversion n_{th} linearisiert werden. Aus Gleichung (6.8) ist ersichtlich, dass die Gewinnrate des kombinierten Modells bereits linear in der Ladungsträgerinversion ist, so dass die Näherung eines linearen Gewinns

$$\begin{aligned} G(n(t)) - G_{th} &= v_g \left. \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{th} (n(t) - n_{th}) = G_{n_{th}} (n(t) - n_{th}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ W A (n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}) - \Gamma \kappa \right\} \end{aligned} \quad (6.9)$$

in diesem Modell exakt ist. Einsetzen von (6.9) und (3.42) in (6.1) liefert mit der Definition des α -Faktor (3.69) folgende Gleichung für das elektrische Feld des kombinierten Modells

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t) &= (1 - i\alpha) \frac{1}{2} \left\{ \Gamma W A (n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}) - \kappa \right\} \mathcal{E}(t) \\ &\quad + \frac{K_{ec}}{\tau_{in}} e^{i\Theta} \mathcal{E}(t - \tau_{ec}) + F_{\mathcal{E}}(t). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Diese komplexe stochastische Differentialgleichung kann analog zu dem Fall ohne Rückkopplung wieder mit Hilfe des Ito-Kalküls in zwei reelle stochastische Differentialgleichungen für die Photonendichte n_{ph} und die Phase ϕ umgeschrieben werden. Die Einzelheiten sind in dem Anhang A (insbesondere in den Formeln (A.11)) wiedergegeben. Das fertige Gleichungssystem nimmt folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \dot{n}_{ph} &= -\kappa n_{ph}(t) + \Gamma W A (n_e + n_h - N^{QD}) n_{ph} + \beta \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h \\ &\quad + 2 \frac{K_{ec}}{\tau_{in}} \sqrt{n_{ph}(t - \tau_{ec}) n_{ph}(t)} \cos(\phi(t) - \phi(t - \tau_{ec}) + \Theta) + F_{n_{ph}}(t) \end{aligned} \quad (6.11a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \Gamma W A (n_e + n_h - N^{QD}) - \kappa \right\} \\ &\quad - \frac{K_{ec}}{\tau_{in}} \sqrt{\frac{n_{ph}(t - \tau_{ec})}{n_{ph}(t)}} \sin(\phi(t) - \phi(t - \tau_{ec}) + \Theta) - F_{\phi}(t) \end{aligned} \quad (6.11b)$$

$$\dot{n}_e = -\frac{1}{\tau_e}n_e + S_e^{in}N^{QD} - WA(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph} - \frac{W}{N^{QD}}n_en_h \quad (6.11c)$$

$$\dot{n}_h = -\frac{1}{\tau_h}n_h + S_h^{in}N^{QD} - WA(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph} - \frac{W}{N^{QD}}n_en_h \quad (6.11d)$$

$$\dot{w}_e = \eta(w_e)\frac{j(t)}{e_0} + \frac{n_e}{\tau_e}\frac{N^{WL}}{N^{QD}} - S_e^{in}N^{WL} - \frac{W}{N^{WL}}w_ew_h \quad (6.11e)$$

$$\dot{w}_h = \eta(w_e)\frac{j(t)}{e_0} + \frac{n_h}{\tau_h}\frac{N^{WL}}{N^{QD}} - S_h^{in}N^{WL} - \frac{W}{N^{WL}}w_ew_h. \quad (6.11f)$$

Die beiden reellen stochastischen Terme $F_{n_{ph}}(t)$ und $F_\phi(t)$ haben die Korrelationseigenschaften

$$\begin{aligned} \langle F_{n_{ph}}(t)F_{n_{ph}}(t') \rangle &= 2\beta \underbrace{\frac{WA}{N^{QD}}n_e(t)n_h(t)}_{R_{sp}} n_{ph}(t)\delta(t-t') \\ \langle F_\phi(t)F_\phi(t') \rangle &= \frac{\beta}{2n_{ph}(t)} \underbrace{\frac{WA}{N^{QD}n_{ph}(t)}n_e(t)n_h(t)}_{R_{sp}/n_{ph}} \delta(t-t'). \end{aligned}$$

Die rot eingefärbten Terme des Gleichungssystems (6.11) stimmen mit dem Rattengleichungsmodell überein.

7. Dynamik der Laserdiode

In diesem Kapitel wird auf das kombinierte Gleichungssystem (6.11) ohne Rückkopplung ($K_{ec} = 0$) eingegangen. Dazu wird zuerst in Abschnitt 7.1 die numerische Implementierung beschrieben. Dann werden in Abschnitt 7.2 analytische Näherungen für die Fixpunkte des Gleichungssystems (6.11) hergeleitet und mit den Ergebnissen numerischer Rechnungen verglichen. In Abschnitt 7.3 wird auf die Dynamik des kombinierten Modells eingegangen. Dabei können, abhängig von dem optischen Füllfaktor Γ , zwei unterschiedliche dynamische Regime unterschieden werden. Für einen kleinen optischen Füllfaktor $\Gamma = 0.0011$ regiert die Laserdiode auf einen Strompuls mit stark gedämpften Relaxationsoszillationen. Diese sind in guter Übereinstimmung mit den in Quantenpunktlasern beobachteten [LUE08, LUE09a]. Wird die Kopplung verstärkt, zeigt die Laserdiode für $\Gamma = 0.0015$ ausgeprägtere Relaxationsoszillationen (vergleiche Abb. 7.6) höherer Frequenz. Diese werden experimentell in Quantengrabenlasern beobachtet [TAR95a]. Das Gleichungssystem (6.11) nimmt ohne Rückkopplung ($K_{ec} = 0$) folgende Form an:

$$\dot{n}_{ph} = -\kappa n_{ph} + \Gamma W A(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph} + \beta \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h \quad (7.1a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha}{2} \{ \Gamma W A(n_e + n_h - N^{QD}) - \kappa \} \quad (7.1b)$$

$$\dot{n}_e = -\frac{n_e}{\tau_e} + S_e^{\text{in}} N^{QD} - W A(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph} - \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h \quad (7.1c)$$

$$\dot{n}_h = -\frac{n_h}{\tau_h} + S_h^{\text{in}} N^{QD} - W A(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph} - \frac{W}{N^{QD}} n_e n_h \quad (7.1d)$$

$$\dot{w}_e = \eta(w_e) \hat{j}(t) + \frac{n_e}{\tau_e} \frac{N^{\text{WL}}}{N^{QD}} - S_e^{\text{in}} N^{\text{WL}} - \frac{W}{N^{\text{WL}}} w_e w_h \quad (7.1e)$$

$$\dot{w}_h = \eta(w_e) \hat{j}(t) + \frac{n_h}{\tau_h} \frac{N^{\text{WL}}}{N^{QD}} - S_h^{\text{in}} N^{\text{WL}} - \frac{W}{N^{\text{WL}}} w_e w_h \quad (7.1f)$$

In den Gleichungen (7.1e) und (7.1f) wurde noch eine auf die Elementarladung e_0 normierte Stromdichte \hat{j} eingeführt.

7.1. Grundlagen

Das Gleichungssystem wurde in C++ implementiert. Für die Integration der Differentialgleichungen wird ein Eulerverfahren verwendet. In jedem Zeitschritt werden die Streuraten durch lineare Interpolation aus den Datensätzen gewonnen. Diese liegen jeweils für festes Verhältnis $g_c = w_h/w_e$ von Elektronen- und Löcherdichte in der Benetzungsschicht für g_c -Werte zwischen 1.0 und 4.0 in Abständen von 0.2 vor. Für die

Laserdynamik werden in diesem Kapitel Pulse der Stromdichte von der Form

$$j(t) = j_0 \exp \left\{ - \left(\frac{t - t_0}{(t_0 + 0.1) \text{ ns}} \right)^n \right\}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ gerade}$$

verwendet. Dabei ist j_0 die maximale Stromdichte eines Pulses. Sie wird zu dem Zeitpunkt t_0 erreicht. Für die in diesem Kapitel verwendeten Integrationszeiten zwischen 10 ns und 42 ns ergeben sich für $n = 90$ Pulse mit An- und Abstiegszeiten von wenigen Hundert Pikosekunden und einem flachem Plateau. Ein solcher Puls sowie die Reaktion der Photonendichte für den stark gedämpften Fall $\Gamma = 0.0011$ und den oszillatorischen Fall $\Gamma = 0.0015$ ist in Abb. 7.1 dargestellt. Als Anfangswerte der dynamischen Varia-

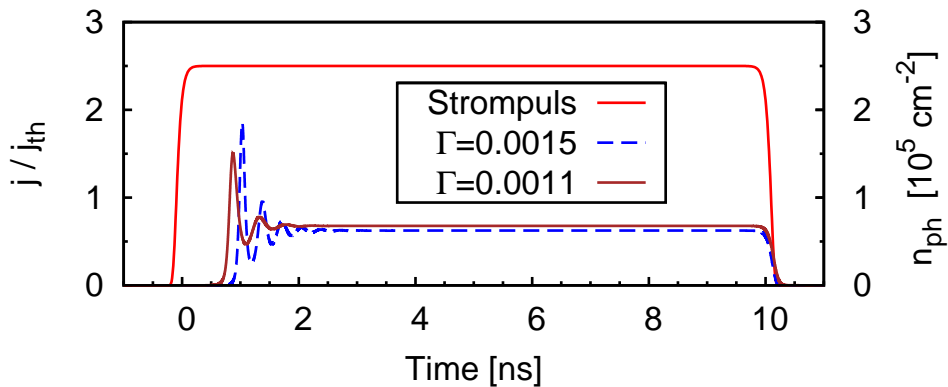


Abbildung 7.1.: Gaußformiger Strompuls und die Antwort der Photonendichte im oszillatorischen ($\Gamma = 0.0015$) und im stark gedämpften ($\Gamma = 0.0011$) Regime. Die maximale Stromdichte des Plateaus beträgt $j = 2.5 \cdot j_{th}(\Gamma)$. Die Schwellstromdichten sind $j_{th}(\Gamma = 0.0015) = 2.407 \text{ Acm}^{-2}$ und $j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 3708 \text{ Acm}^{-2}$. Parameter in Tabelle 5.1.

blen zu dem Zeitpunkt t_0 werden, soweit nicht anders beschrieben, immer alle Dichten und die Phase als Null angenommen

$$(n_{ph}, \phi, n_e, n_h, w_e, w_h)^\top(t_0) = \mathbf{0}.$$

Für die Berechnungen mit externer Rückkopplung ($K_{ec} \neq 0$) in dem Kapitel 8 werden teilweise kastenförmige Pulse verwendet, um auch für längere Zeitserien ebene Plateaus der Stromdichte zu ermöglichen. Auch in diesem Fall werden Nullanfangswerte angenommen. Zu Beginn wird das Gleichungssystem ohne Rückkopplung verwendet. Diese wird „eingeschaltet“, wenn die Simulationszeit größer als die Umlaufzeit in der externen Kavität $t > \tau_{ec}$ ist, das heißt, sobald Rückkopplungseffekte zu erwarten sind. Falls die Photonendichte für $t > \tau_{ec}$ immer noch unterhalb eines unteren Grenzwertes ist, wird weiterhin das Gleichungssystem ohne Rückkopplung verwendet bis der Grenzwert überschritten wird. Für die Bestimmung der Stromdichte an der Laserschwelle werden Simulationen mit ansteigenden Stromdichten gemacht. Die Photonendichten der stationären Zustände werden über der Stromdichte aufgetragen (siehe Abb. 7.2). Unterhalb der Laserschwelle steigt die Rate der spontanen Emission $R_{sp} = W n_e n_h / N^{QD}$ aufgrund der sich aufbauenden Inversion an. Da zusätzlich die Rate der induzierten

Emission $R_{ind} = WA(n_e + n_h - N^{QD})n_{ph}$, die für kleine Ströme negativ ist, ab der Transparenz des Materials positiv wird, steigt damit auch die Photonendichte leicht an (siehe Gleichung (7.1a)). An der Laserschwelle beginnt die Rate der induzierten Emission zu dominieren, was sich in einem linearen Anstieg der Photonendichte ausdrückt. Die Schwellstromdichte wird bestimmt, indem jeweils eine Interpolationsgrade durch das Regime kleiner Ströme und durch das lineare Regime gelegt werden. Die Abszisse des Schnittpunktes beider Graden liefert die Schwellstromdichte. Experimentell

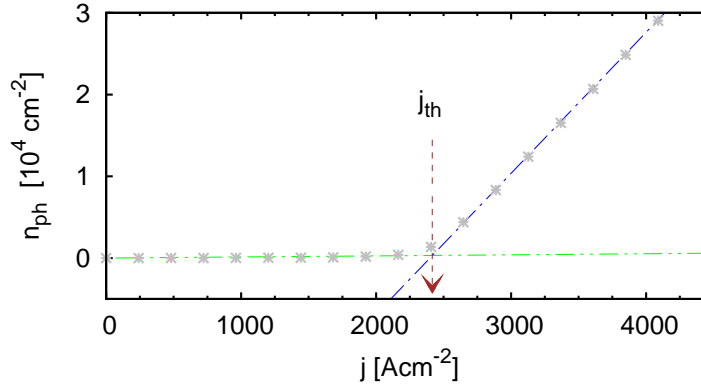


Abbildung 7.2.: Veranschaulichung des Verfahrens zur Bestimmung der Schwellstromdichte

kommt es bei hohen Stromdichten zu einer Gewinnsättigung. Bei einer weiteren Erhöhung der Stromdichte nimmt die Photonendichte dann nur noch geringfügig zu. Dies lässt sich durch eine Auffüllung der elektronischen Zustände in der Benetzungsschicht erklären (Coulombblockade). Der Gewinnsättigung wird in unserem Modell durch den

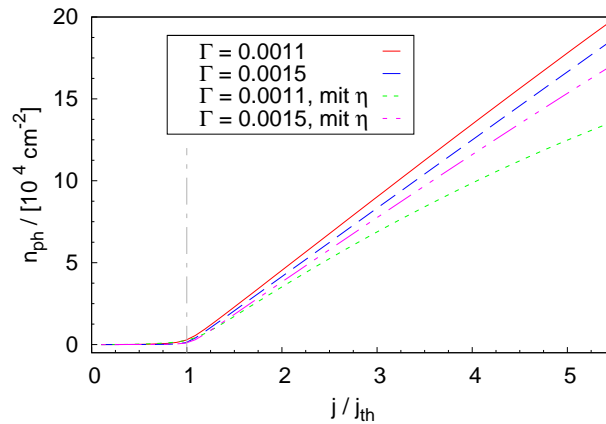


Abbildung 7.3.: Photonen-Stromdichtecharakteristik der Laserdiode ohne Rückkopplung für $\Gamma = 0.0011$ und $\Gamma = 0.0015$ mit ($\eta = \eta(w_e)$) und ohne Stromeffizienzfaktor ($\eta = 1$). Die graue, strich-punktierte Linie markiert die Laserschwelle. Parameterwerte wie in Tabelle 5.1.

Stromeffizienzfaktor $\eta(w_e) = 1 - w_e/N^{\max}$ Rechnung getragen. Abb. 7.3 zeigt auf die

jeweilige Schwellstromdichte normierte Photonen-Stromdichtecharakteristik für den stark gedämpften ($\Gamma = 0.0011$) und den oszillatorischen ($\Gamma = 0.0015$) Fall jeweils mit ($\eta = \eta(w_e)$) und ohne Stromeffizienzfaktor ($\eta = 1$). Die Charakteristiken mit Stromeffizienzfaktor zeigen für höhere Stromdichten sublineares Verhalten.

7.2. Fixpunkte der Ratengleichungen ohne Rückkopplung

In diesem Abschnitt werden die Fixpunkte der Ratengleichungen ohne Rückkopplung bestimmt.

Die Bewegungsgleichungen für die Ladungsträgerdichten (7.1c)-(7.1f) sind nicht unabhängig voneinander, sondern durch einen Ladungserhaltungssatz miteinander verknüpft. Dies wird ersichtlich, wenn man die Differenzen der Änderungsraten von Elektronen und Löchern in den Quantenpunkten und der Benetzungsschicht betrachtet

$$\dot{n}_e - \dot{n}_h = -\left(\frac{n_e}{\tau_e} - \frac{n_h}{\tau_h}\right) + (S_e^{\text{in}} - S_h^{\text{in}})N^{QD} \quad (7.2a)$$

$$\dot{w}_e - \dot{w}_h = \frac{N^{\text{WL}}}{N^{QD}}\left(\frac{n_e}{\tau_e} - \frac{n_h}{\tau_h}\right) - (S_e^{\text{in}} - S_h^{\text{in}})N^{\text{WL}}. \quad (7.2b)$$

Aus den Gleichungen (7.2) ergibt sich folgender Zusammenhang der Änderungsraten

$$\dot{n}_e - \dot{n}_h + \underbrace{\frac{N^{QD}}{N^{\text{WL}}}}_{\epsilon}(\dot{w}_e - \dot{w}_h) = 0. \quad (7.3)$$

Die Summe der Ladungsträgeränderungsraten in den Quantenpunkten und in der Benetzungsschicht gleichen sich also aus. Der Faktor $\epsilon = N^{QD}/N^{\text{WL}} \approx 0.23 \cdot 10^{-3}$ beschreibt das Verhältnis von der Ladungsträgerdichte in den Quantenpunkten und der Zelldichte der Benetzungsschicht. Gleichung (7.3) besagt, dass die Summe der Differenzen der Ladungsträgerdichten in den Quantenpunkten $n_e - n_h$ und in der Benetzungsschicht $w_e - w_h$ gewichtet mit ϵ eine von der Dotierung abhängige Konstante ist. Diese kann im intrinsischen Fall gleich Null gesetzt werden. So erhält man die im Folgenden verwendete Form des Erhaltungssatzes

$$\boxed{n_e - n_h + \epsilon(w_e - w_h) = 0.} \quad (7.4)$$

Die Grundlösungen des Gleichungssystems (7.1) haben konstante Photonen- und Ladungsträgerdichten. Nur die Phase der elektrischen Feldamplitude variiert linear mit der Zeit $\phi(t) = \Delta\omega_s t$. Das gesamte normierte elektrische Feld (langsam variierende Amplitude und Trägerwelle) nimmt mit diesem Ansatz die Form

$$\bar{E}(t) = \mathcal{E}(t)e^{-i\omega_{th}t} = \sqrt{N_{ph,s}}e^{-i(\phi(t)+\omega_{th})t} = \sqrt{N_{ph,s}}e^{-i(\Delta\omega_s+\omega_{th})t} \quad (7.5)$$

an. Dabei ist der Koeffizient der linearen Phase durch die Frequenzverschiebung zu der Schwellwertfrequenz $\Delta\omega_s = \omega_s - \omega_{th}$ gegeben. Eingesetzt in das Ratengleichungssystem

liefert dieser Ansatz:

$$0 = \left\{ -\kappa + \Gamma W A(n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) \right\} n_{ph,s} + \beta \frac{W}{N^{QD}} n_{e,s} n_{h,s} \quad (7.6a)$$

$$\Delta\omega_s = \frac{\alpha}{2} \left\{ \Gamma W A(n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) - \kappa \right\} \quad (7.6b)$$

$$0 = -\frac{n_{e,s}}{\tau_e} + S_e^{\text{in}} N^{QD} - W A(n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) n_{ph,s} - \frac{W}{N^{QD}} n_{e,s} n_{h,s} \quad (7.6c)$$

$$0 = -\frac{n_{h,s}}{\tau_h} + S_h^{\text{in}} N^{QD} - W A(n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) n_{ph,s} - \frac{W}{N^{QD}} n_{e,s} n_{h,s} \quad (7.6d)$$

$$0 = \eta(w_{e,s}) \hat{j}(t) + \frac{n_{e,s}}{\tau_e} \frac{N^{\text{WL}}}{N^{QD}} - S_e^{\text{in}} N^{\text{WL}} - \frac{W}{N^{\text{WL}}} w_{e,s} w_{h,s} \quad (7.6e)$$

$$0 = \eta(w_{e,s}) \hat{j}(t) + \frac{n_{h,s}}{\tau_h} \frac{N^{\text{WL}}}{N^{QD}} - S_h^{\text{in}} N^{\text{WL}} - \frac{W}{N^{\text{WL}}} w_{e,s} w_{h,s}. \quad (7.6f)$$

In der Gleichung für die Photonendichte kann das Produkt βR_{sp} aus dem Koeffizienten und der Rate der spontanen Emission gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden, das heißt,

$$\beta R_{sp} = \beta \frac{W}{N^{\text{WL}}} n_{e,s} n_{h,s} = 0$$

gesetzt werden. Anhand der Gleichung (7.6a) lassen sich zwei Regime unterscheiden. Unterhalb der Laserschwelle ist die „triviale“ Lösung mit $n_{ph,s} = 0$ stabil. Der Laser ist ausgeschaltet. An der *Laserschwelle* wird die triviale Lösung instabil. Oberhalb der Schwelle hat das Gleichungssystem (7.6) eine stabile Lösung mit endlicher Photonendichte. Zusätzlich impliziert $n_{ph,s} \neq 0$ den folgenden Erhaltungssatz

$$n_{ph,s} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{e,s} + n_{h,s} = \frac{\kappa}{\Gamma W A} + N^{QD}}. \quad (7.7)$$

Ein Vergleich mit (6.9) zeigt, dass damit oberhalb der Laserschwelle die optische Verstärkung auf ihren Schwellwert „festgeklemmt“ ist, also (7.7) gleichwertig zu

$$G_{opt} - G_{opt,th} = \frac{\Gamma W A}{2} (n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) - \frac{\kappa}{2} = 0$$

ist.

7.2.1. Stationärer Zustand unterhalb der Laserschwelle

In diesem Abschnitt betrachten wir die unterhalb der Laserschwelle gültigen Beziehungen. Hier können die Terme der spontanen Emission in den Gleichungen (7.6c) und (7.6d) vernachlässigt werden, da die durch den Einsteinkoeffizienten gegebene Verlustrate klein gegenüber der durch die Ladungsträgerlebensdauern bestimmte Verlustrate ist ($W = 1.3 \text{ ns}^{-1} \ll \tau_e^{-1} \sim 0.2 \text{ ps}^{-1}$ und $W \ll \tau_h^{-1} \sim 0.1 \text{ ps}^{-1}$). Dies ist oberhalb der Schwelle nicht mehr möglich. Damit ergeben sich die stationären Ladungsträgerdichten in den Quantenpunkten in Abhängigkeit der Ladungsträgerdichten in der Benetzungsschicht zu

$$n_{e,s} = \tau_e S_e^{\text{in}}(w_{e,s}, w_{h,s}) N^{QD} \quad (7.8a)$$

$$n_{h,s} = \tau_h S_e^{\text{in}}(w_{e,s}, w_{h,s}) N^{QD}. \quad (7.8b)$$

Die Abhängigkeit der Ladungsträgerdichten in der Benetzungsschicht von der Stromdichte erhält man durch Einsetzen von (7.8a) in (7.6e)

$$\frac{w_{e,s}w_{h,s}}{\eta(w_{e,s})} = \frac{N^{\text{WL}}}{W} \hat{j}. \quad (7.9)$$

Die Gleichungen (7.8a), (7.8b), (7.9) und die Ladungsträgererhaltung (7.4) bestimmen die Ladungsträgerdichten unterhalb der Schwelle. Da die Einstreuratens S_e^{in} und S_h^{in} unterhalb der Laserschwelle monoton ansteigen (vergleiche Abb. 5.3), erhöhen sich die Ladungsträgerdichten in den Quantenpunkten mit steigender Stromdichte.

7.2.2. Stationärer Zustand oberhalb der Laserschwelle

Oberhalb der Laserschwelle ist der optische Gewinn auf seinen Schwellwert festgeklemmt. Aus (7.6b) und (7.7) ist ersichtlich, dass damit

$$\Delta\omega_s = \omega_s - \omega_{th} = 0 \quad (7.10)$$

gilt. Ohne Rückkopplung emittiert der Laser also genau auf seiner Schwellwertkreisfrequenz ω_{th} . Die Phase $\phi(t)$ bleibt bei diesem Ansatz zeitlich konstant und ist beliebig wählbar, da sie nicht mit der Differenzialgleichung für die Photonendichte (7.1a) gekoppelt ist. Um die Photonendichte oberhalb der Laserschwelle in Abhängigkeit von der Pumpstromdichte auszudrücken, wird die Gleichung (7.7) in (7.6c) eingefügt

$$n_{ph,s} = \frac{\Gamma}{\kappa} \left\{ -\frac{n_{e,s}}{\tau_e} + S_e^{\text{in}} N^{QD} - \frac{W}{N^{QD}} n_{e,s} n_{h,s} \right\}. \quad (7.11)$$

Wenn (7.6e) multipliziert mit ϵ in (7.11) eingesetzt wird, ergibt sich folgender Ausdruck für die Photonendichte

$$n_{ph,s} = \frac{\Gamma\epsilon}{\kappa} \left\{ \eta(w_{e,s}) \hat{j} - W \left(\frac{w_{h,s}}{N^{\text{WL}}} \right) w_{e,s} - W N^{\text{WL}} \left(\frac{n_{e,s}}{N^{QD}} \right) \left(\frac{n_{h,s}}{N^{QD}} \right) \right\}. \quad (7.12)$$

Aus (7.12) ist ersichtlich, dass die spontane Emission in den Quantenpunkten (letzter Term auf der rechten Seite von in (7.12)) oberhalb der Schwelle nicht vernachlässigt werden darf. Die numerische Integration des Gleichungssystem zeigt, dass die Schwellendichte der Löcher in der Benetzungsschicht w_h^{th} von der Größenordnung der Zelldichte ist $w_h^{th} \approx N^{\text{WL}}/2$ (siehe Tabelle 7.2). Damit sind die beiden letzten Terme auf der rechten Seite von (7.12), die die spontane Emission in der Benetzungsschicht und in den Quantenpunkten beschreiben, von der gleichen Größenordnung. Als nächstes werden die Ladungsträgerdichten in Abhängigkeit der Pumpstromdichte formuliert. Addition von (7.6e) und (7.6f) liefert

$$0 = 2\eta(w_{e,s}) \hat{j} + N^{\text{WL}} \left(\frac{1}{N^{QD}} \left(\frac{n_{e,s}}{\tau_e} + \frac{n_{h,s}}{\tau_h} \right) - (S_e^{\text{in}} + S_h^{\text{in}}) \right) - 2 \frac{W}{N^{\text{WL}}} w_{e,s} w_{h,s}. \quad (7.13)$$

Für die in der Ladungserhaltung auftretende Differenz von Elektronen- und Löcherdichte in den Quantenpunkten ergibt sich aus (7.6c), (7.6d) unter Ausnutzung von

(7.7)

$$n_{e,s} - n_{h,s} = N^{QD} \left(\tau_e S_e^{\text{in}} - \tau_h S_h^{\text{in}} \right) - W \underbrace{\left(\frac{n_{e,s}}{N^{QD}} \right)}_{<1} n_{h,s} (\tau_e - \tau_h) \quad (7.14a)$$

$$- \frac{\kappa}{\Gamma} \underbrace{\left(\frac{n_{ph,s}}{N^{QD}} \right)}_{\sim 1.3 \cdot 10^{-5}} N^{QD} (\tau_e - \tau_h). \quad (7.14b)$$

Die Produkte aus Ladungsträgerlebensdauern und Einstreuratzen lassen sich gut durch Fermiverteilungen approximieren [LUE08c-]

$$\tau_e S_e^{\text{in}}(w_e, g_c) = 1 - \frac{1.0175}{1 + \exp\left(\frac{w_e g_c - 196}{48.6}\right)} \quad (7.15a)$$

$$\tau_h S_h^{\text{in}}(w_e, g_c) = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{w_e g_c - 35}{4.66}\right)}. \quad (7.15b)$$

Dabei ist mit $g_c = w_h/w_e$ das Verhältnis von Löcher- zu Elektronendichte in der Benetzungsschicht bezeichnet. Die Ladungsträgerdichten sind in den Approximationsfunktionen in Einheiten von 10^{11} cm^{-2} gegeben.

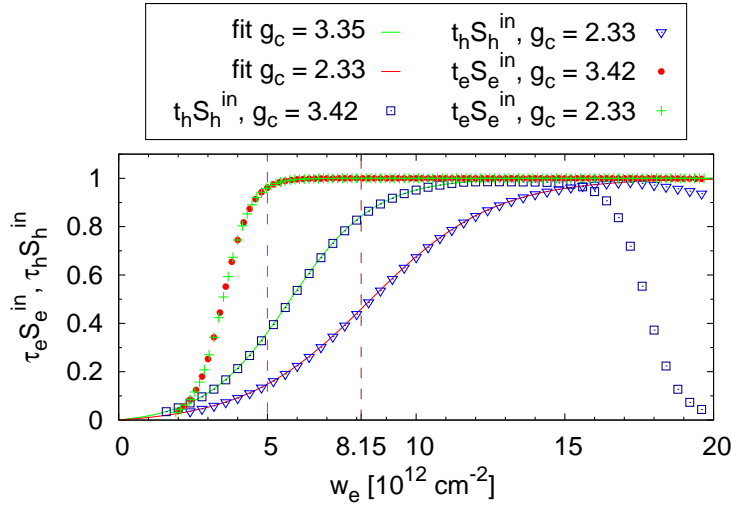


Abbildung 7.4.: Produkte aus Ladungsträgerlebensdauern $\tau_{e,h}$ und Einstreuratzen $S_{e,h}^{\text{in}}$ von Elektronen und Löchern in den Quantenpunkten als Funktion der Elektronendichte in der Benetzungsschicht w_e für verschiedene Werte des g_c -Faktors ($g_c = w_h/w_e$). Numerisch errechnete Datenpunkte sind mit Symbolen gekennzeichnet, die Approximationsfunktionen (7.15) mit durchgezogenen Linien. Die braun gestrichelte Linie zeigt die numerisch berechnete w_e -Dichte an der Laserschwelle für den stark gedämpften ($w_e^{\text{th}}(\Gamma = 0.0011) = 8.15 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}$), die rosa gestrichelte Linie die w_e -Dichte für den oszillatorischen Fall ($w_e^{\text{th}}(\Gamma = 0.0015) = 5.0 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}$). Parameter für numerisch errechnete Werte wie in Tabelle 5.1.

In Abb. 7.4 sind die Produkte aus Ladungsträgerlebensdauern $\tau_{e,h}$ und Einstreuratzen $S_{e,h}^{\text{in}}$ für verschiedene Verhältnisse von w_h zu w_e sowie ihre Approximationen durch die

Funktionen (7.15) dargestellt. Die numerisch errechneten Elektronendichten in der Benetzungsschicht an der Laserschwelle sind für den stark gedämpften Fall ($\Gamma = 0.0011$) mit einer vertikalen, gestrichelten, braunen Linie und für den oszillatorischen Fall ($\Gamma = 0.0015$) mit einer gestrichelten rosa Linie gekennzeichnet. Aus den numerischen Berechnungen ergibt sich, dass $\tau_e S_e^{\text{in}} \approx 1$ und $\tau_h S_h^{\text{in}} \approx 1/2$ angenommen werden kann. Da die Produkte aus Einsteinkoeffizienten W und Ladungsträgerlebensdauern $\tau_{e,h}$ klein gegenüber Eins sind ($W\tau_e \approx 2.6 \cdot 10^{-4} \ll 1$ und $W\tau_h \approx 1.3 \cdot 10^{-4} \ll 1$), kann der zweite Term auf der rechten Seite von (7.14a) gegenüber dem Ersten vernachlässigt werden. Wie wir noch bei der Berechnung der Schwellwertdichten sehen werden, gilt oberhalb der Schwelle $n_{ph,s} \sim 6 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$ und $n_{h,s} \sim 2 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}$ (siehe Tabelle 7.1). Wegen

$$\frac{\kappa}{\Gamma} \tau_h \cdot \frac{n_{ph,s}}{N^{QD}} \sim 1.3 \cdot 10^{-5} \quad \text{und} \quad \frac{\kappa}{\Gamma} \tau_e \cdot \frac{n_{ph,s}}{N^{QD}} \sim 0.75 \cdot 10^{-5} \quad (7.16)$$

kann auch der dritte Term auf der rechten Seite von (7.14a) gegenüber dem ersten vernachlässigt werden. Die vereinfachte Gleichung (7.14a)

$$n_{e,s} - n_{h,s} = N^{QD} (\tau_e S_e^{\text{in}} - \tau_h S_h^{\text{in}}) \quad (7.17)$$

in die Ladungserhaltung (7.4) eingesetzt, liefert eine implizite Gleichung für $w_{h,s}$

$$w_{h,s} = w_{e,s} + N^{\text{WL}} (\tau_e S_e^{\text{in}}(w_{e,s}, w_{h,s}) - \tau_h S_h^{\text{in}}(w_{e,s}, w_{h,s})). \quad (7.18)$$

Wird $n_{h,s}$ mit Hilfe der Ladungsträgererhaltung (7.4) durch $n_{e,s}$, $w_{e,s}$ und $w_{h,s}$ ausgedrückt

$$n_{h,s} = n_{e,s} + \epsilon(w_{e,s} - w_{h,s}) \stackrel{(7.18)}{=} n_{e,s} + N^{QD} (\tau_h S_h^{\text{in}} - \tau_e S_e^{\text{in}}) \quad (7.19)$$

und (7.7) nach $n_{e,s}$ umgestellt, erhalten wir eine Gleichung für $n_{e,s}$ in Abhängigkeit von $w_{e,s}$ und $w_{h,s}$

$$n_{e,s} = \frac{\kappa}{\Gamma W A} + N^{QD} - n_{h,s} \quad (7.20a)$$

$$\stackrel{(7.19)}{=} \frac{\kappa}{\Gamma W A} + N^{QD} - n_{e,s} - \epsilon(w_{e,s} - w_{h,s}) \quad (7.20b)$$

$$\Leftrightarrow n_{e,s} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa}{\Gamma W A} + N^{QD} (1 + \tau_e S_e^{\text{in}} - \tau_h S_h^{\text{in}}) \right\}. \quad (7.20c)$$

Zuletzt kann die Gleichung (7.7) noch nach $n_{h,s}$ umgestellt werden

$$n_{h,s} = \frac{\kappa}{\Gamma W A} + N^{QD} - n_{e,s}, \quad (7.21)$$

um $n_{h,s}$ in Abhängigkeit von $n_{e,s}$ zu erhalten. Nun können über die Gleichungen (7.10), (7.12), (7.13), (7.18), (7.20c) und (7.21) die Dichten des sich bei einer bestimmten Stromdichte einstellenden stationären Zustandes oberhalb der Laserschwelle berechnet werden.

7.2.3. Dichten an der Laserschwelle

In diesem Abschnitt werden die Schwellwerte der Photonendichte, der Ladungsträger- und der Stromdichte abgeschätzt. Die Photonen-Stromdichtecharakteristik des Lasers ist etwa bis zu der dreifachen Schwellstromdichte linear (siehe Abb. 7.3). In diesem Bereich machen sich Auffüllungseffekte der stromführenden Zellen in der Benetzungsschicht noch nicht bemerkbar. Der Stromeffizienzfaktor kann näherungsweise zu Eins gesetzt werden ($\eta(w_e) \approx 1$). Wird die Gleichung für die stationäre Photonendichte (7.12) betrachtet, liegt es nahe eine normierte Schwellstromdichte über

$$\hat{j}_{th} := \frac{j_{th}}{e_0} := \frac{W}{N^{WL}} w_e^{th} w_h^{th} + \frac{W N^{WL}}{(N^{QD})^2} n_e^{th} n_h^{th} \quad (7.22)$$

zu definieren. Da sich die Ladungsträgerdichten oberhalb der Laserschwelle nur geringfügig verändern (siehe dazu Abb. 7.5), kann die Photonendichte als linear in der Stromdichte approximiert werden

$$n_{ph,s} \approx C(\Gamma) \left(\frac{\eta(w_e(\hat{j})) \hat{j} - \hat{j}_{th}}{\hat{j}_{th}} \right). \quad (7.23)$$

Mit einer nur von dem optischen Füllfaktor Γ abhängigen Konstante

$$C(\Gamma, j_{th}) = \frac{\Gamma \epsilon j_{th}}{\kappa e_0} = \frac{\Gamma N^{QD} W}{\kappa N^{WL}} \left\{ \frac{1}{N^{WL}} w_e^{th} w_h^{th} + \frac{N^{WL}}{(N^{QD})^2} n_e^{th} n_h^{th} \right\}. \quad (7.24)$$

Diese stellt eine typische Größe der Photonendichte in Abhängigkeit von Γ und dem Schwellstrom j_{th} dar. Sie wird für eine dimensionslose Formulierung des Gleichungssystems (7.1) benötigt und geht auf eine Ausarbeitung von Thomas Erneux zurück. Ab der Laserschwelle gilt in guter Näherung $\tau_e S_e^{\text{in}} \approx 1$ (vergleiche Abb. 7.4). Mit (7.8a) wird ersichtlich, dass die Elektronenzustände in den Quantenpunkten an der Laserschwelle fast vollständig besetzt sind:

$$n_e^{th} = \tau_e S_e^{\text{in}}(w_e^{th}, w_h^{th}) N^{QD} \approx N^{QD} = 4.5 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}. \quad (7.25)$$

(siehe auch Abb. 7.5(a)). Über die Inversionserhaltung (7.7) lässt sich ebenfalls die Schwellwertkonzentration der Löcher abschätzen

$$n_h^{th} = \frac{\kappa}{\Gamma W A} + N^{QD} - n_e^{th} \approx \frac{\kappa}{\Gamma W A} = \begin{cases} 2.1 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0011 \\ 1.5 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0015. \end{cases} \quad (7.26)$$

Mit der aus den Gleichungen (7.8) gewonnenen Beziehung

$$n_e^{th} + n_h^{th} = (\tau_e S_e^{\text{in}} + \tau_h S_h^{\text{in}}) N^{QD} \quad (7.27)$$

erhält man durch Umstellen der Gleichung (7.7) einen Ausdruck für das Produkt $\tau_h S_h^{\text{in}}$ an der Schwelle

$$\tau_h S_h^{\text{in}}(w_e^{th}, w_h^{th}) = \frac{\kappa}{\Gamma W A N^{QD}}. \quad (7.28)$$

Wird diese Beziehung mit der passenden approximierenden Gleichung (7.15b) gleichgesetzt, kann die Löcherdichte an der Laserschwelle zu

$$w_h^{th} \approx 196 + 48.6 \ln \left(\frac{\kappa + 0.0175 \cdot \Gamma WAN^{QD}}{\Gamma WAN^{QD} - \kappa} \right) \quad (7.29a)$$

$$\approx 196 + 48.6 \ln \left(\frac{\kappa}{\Gamma WAN^{QD} - \kappa} \right) \quad (7.29b)$$

$$= \begin{cases} 18.9 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0011 \\ 16.4 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0015 \end{cases} \quad (7.29c)$$

abgeschätzt werden. Wird Gleichung (7.14a) in die Ladungserhaltung (7.4) eingesetzt, erhält man mit den Näherungen $\tau_e S_e^{in} \approx 1$ und (7.28) eine Näherung der Elektronendichte in der Benetzungsschicht:

$$w_e^{th} \approx w_h^{th} + N^{WL} \left(\frac{\kappa}{\Gamma WAN^{QD}} - 1 \right) \quad (7.30a)$$

$$= \begin{cases} 18.9 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2} + 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2} \left(\frac{120}{270} - 1 \right) & \text{für } \Gamma = 0.0011 \\ 16.4 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2} + 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2} \left(\frac{120}{351} - 1 \right) & \text{für } \Gamma = 0.0015 \end{cases} \quad (7.30b)$$

$$= \begin{cases} 8.2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0011 \\ 5.2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0015. \end{cases} \quad (7.30c)$$

Aus den Schwellwertdichten lässt sich nun die Stromdichte an der Laserschwelle zu

$$j_{th} = \begin{cases} 4011.8 \text{ Acm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0011 \\ 1932.5 \text{ Acm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0015 \end{cases} \quad (7.31)$$

bestimmen. Damit ergibt sich die charakteristische Größe der Photonendichte $C(\Gamma, \hat{j}_{th})$ zu

$$C(\Gamma) = \begin{cases} 5.2 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0011 \\ 7.1 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2} & \text{für } \Gamma = 0.0015. \end{cases} \quad (7.32)$$

Die in diesem Abschnitt abgeschätzten Schwellwertgrößen sind in Tabelle 7.1 für $\Gamma = 0.0011$ und $\Gamma = 0.0015$ zusammengefasst. Die Ladungsträgerlebensdauern wurden über den Zusammenhang $\tau_{e,h}^{-1} = S_{e,h}^{in}(w_e^{th}, w_h^{th}) + S_{e,h}^{out}(w_e^{th}, w_h^{th})$ durch lineare Interpolation aus den Datensätzen für die Streuraten gewonnen (vergleiche Abb. 5.3).

7.2.4. Vergleich mit den numerisch errechneten Größen

Abb. 7.5 zeigt numerisch errechnete Gleichgewichts-Ladungsträgerdichten als Funktion der normierten Stromdichten j/j_{th} für das stark gedämpfte ($\Gamma = 0.0011$) und das oszillatorische ($\Gamma = 0.0015$) Regime. Die Berechnungen wurden jeweils mit dem Stromeffizienzfaktor ($\eta(\omega_e) = 1 - \omega_e/N^{\max}$ (siehe 5.6)) und ohne Stromeffizienzfaktor ($\eta \equiv 1$) durchgeführt. Die Stromdichten sind immer auf die Schwellwertdichten der jeweiligen Konfiguration normiert. Die Laserschwelle ist mit grauen, strich-punktierten Linien

Bezeichnung	$\Gamma = 0.0011$	$\Gamma = 0.0015$	Einheit
n_e^{th}	0.45	0.45	10^{10} cm^{-2}
n_h^{th}	0.21	0.15	10^{10} cm^{-2}
w_e^{th}	8.2	5.2	10^{12} cm^{-2}
w_h^{th}	18.9	16.4	10^{12} cm^{-2}
$g_c = w_h/w_e$	2.3	3.2	
$j_{th}(\eta = 1)$	4011.8	1932.5	Acm^{-2}
τ_e^{-1}	0.2	0.2	ps^{-1}
τ_h^{-1}	0.1	0.1	ps^{-1}
C	5.2	7.1	10^4 cm^{-2}

Tabelle 7.1.: Analytische Abschätzungen der Ladungsträger- und Schwellstromdichten, der inversen Ladungsträgerlebensdauern sowie anderer charakteristische Größen an der Laserschwelle jeweils für den stark gedämpften ($\Gamma = 0.0011$) und den oszillatorischen ($\Gamma = 0.0015$) Fall. Berechnet ohne Stromeffizienzfaktor η , also $\eta = 1$. Parameterwerte wie in Tabelle 5.1.

Bezeichnung	$\Gamma = 0.0011$	$\Gamma = 0.0015$	Einheit
n_e^{th}	0.449	0.430	10^{10} cm^{-2}
n_h^{th}	0.20	0.16	10^{10} cm^{-2}
w_e^{th}	8.15	5.00	10^{12} cm^{-2}
w_h^{th}	19.00	17.1	10^{12} cm^{-2}
$j_{th}(\eta = 1)$	3708	2407	Acm^{-2}
$j_{th}(\eta)$	6140	3190	Acm^{-2}

Tabelle 7.2.: Numerisch berechnete Schwellwertdichten der Ladungsträger sowie die zugehörigen Schwellstromdichten für den stark gedämpften ($\Gamma = 0.0011$) und den oszillatorischen ($\Gamma = 0.0015$) Fall. Berechnet ohne Stromeffizienzfaktor $\eta = 1$. Die Schwellwertstromdichten sind zusätzlich mit Stromeffizienzfaktor berechnet worden.

gekennzeichnet. Die Schwellwertdichten der Ladungsträger sowie die dazugehörigen Schwellstromdichten sind in Tabelle 7.2 zusammengefasst. Ohne Stromeffizienzfaktor stimmen sie sowohl für $\Gamma = 0.0011$ als auch für $\Gamma = 0.0015$ sehr gut mit den analytisch abgeschätzten Schwellstromdichten (vergleiche Tabelle 5.1) überein. Bei allen

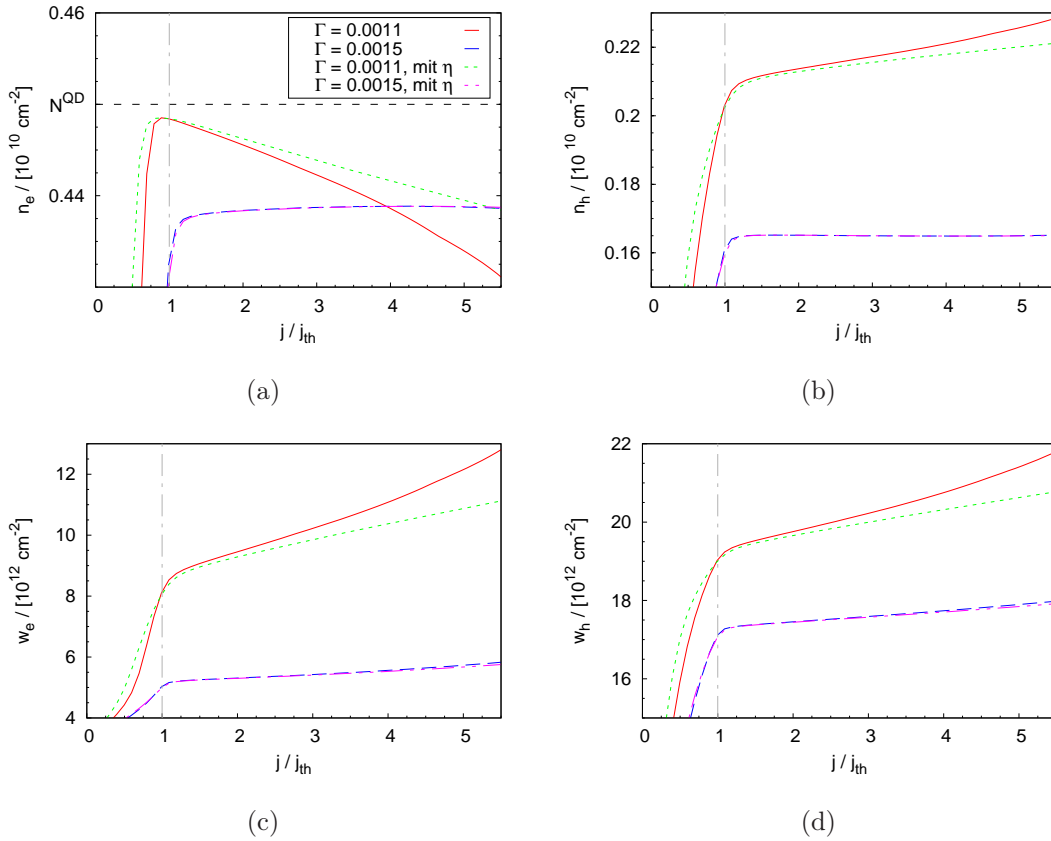


Abbildung 7.5.: Gleichgewichtsladungsträgerdichten in Abhängigkeit der Schwellstromdichte jeweils für den stark gedämpften ($\Gamma = 0.0011$) und den oszillatorischen Fall ($\Gamma = 0.0015$) sowie mit Stromeffizienzfaktor ($\eta(w_e) = 1 - w_e/N^{\max}$ und ohne ($\eta = 1$)). Die graue, strich-punktierte Linie markiert die Laserschwelle. Schwellwertdichten ohne η : $j_{th}(\Gamma = 0.0011, \eta = 1) = 3708 \text{ Acm}^{-2}$, $j_{th}(\Gamma = 0.0015, \eta = 1) = 2.407 \text{ Acm}^{-2}$. Schwellwertdichten mit η : $j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 6.141 \text{ Acm}^{-2}$, $j_{th}(\Gamma = 0.0015) = 3.190 \text{ Acm}^{-2}$. Parameterwerte wie in Tabelle 5.1.

vier Ladungsträgerdichten n_e , n_h , w_e erkennt man, dass die Ladungsträgerdichten in dem Fall starker Dämpfung ($\Gamma = 0.0011$) deutlich höher sind. Das lässt sich mit der geringeren Kopplung zwischen der optischen Feldmode und den Ladungsträgerdichten erklären. Dadurch stellt sich das Gleichgewicht aus strahlenden und nicht-strahlenden Streuprozessen für höhere Ladungsträgerdichten als in dem oszillatorischen Fall ein. In dem oszillatorischen Fall verändern sich die Gleichgewichts-Ladungsträgerdichten kaum mit ansteigender Stromdichte, während sie in dem stark gedämpften Fall stärker variieren. Dies ist ein weiterer Hinweis darauf, dass die Coulomb-Streuprozesse zwischen der Benetzungsschicht und den Quantenpunkten für $\Gamma = 0.0011$ bedeutender

sind. In dem oszillatorischen Fall gibt es keinen erkennbaren Unterschied zwischen den mit und ohne Stromeffizienzfaktor berechneten Gleichgewichts-Ladungsträgerdichten. Es machen sich bei den niedrigeren Ladungsträgerdichten also noch keine Auffüllungseffekte der Benetzungsschicht bemerkbar. In Abb. 7.5(a) und Abb. 7.5(b) lässt sich gut die Erhaltung der Gleichgewichts-Ladungsträgerinversion in den Quantenpunkten (7.7) erkennen. Während die Elektronendichte n_e mit ansteigender Stromdichte abfällt, steigt die Löcherdichte n_h in dem gleichen Maße an, so dass die Summe beider Ladungsträgerarten konstant bleibt.

7.3. Stark gedämpftes und oszillatorisches Regime

In diesem Abschnitt wird genauer auf den Einfluss des optischen Füllfaktors auf die Ratengleichungen ohne Rückkopplung eingegangen. Dabei wird ein Teil der Ergebnisse aus [LUE08] mit dieser Implementierung des Gleichungssystems (7.1) nachvollzogen. Für einen Quantenpunktlaser erwartet man einen kleineren optischen Füllfaktor als für einen Quantengrabenlaser gleicher Bauart, da die Quantenpunkte nicht die gesamte Ebene parallel zu der Schichtung ausfüllen (siehe Kapitel 2.4). Für den kleineren optischen Füllfaktor $\Gamma = 0.0011$ zeigt die Laserdiode daher das dynamische Verhalten eines Quantenpunktlasers [LUE08]. Abb. 7.6 zeigt die Einschaltodynamik und die Spek-

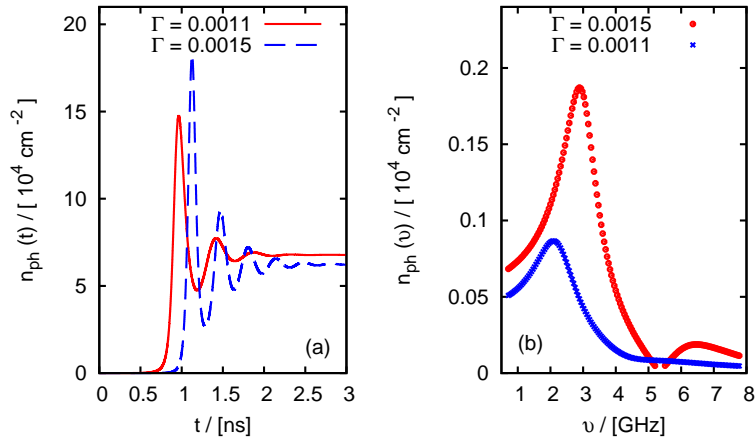


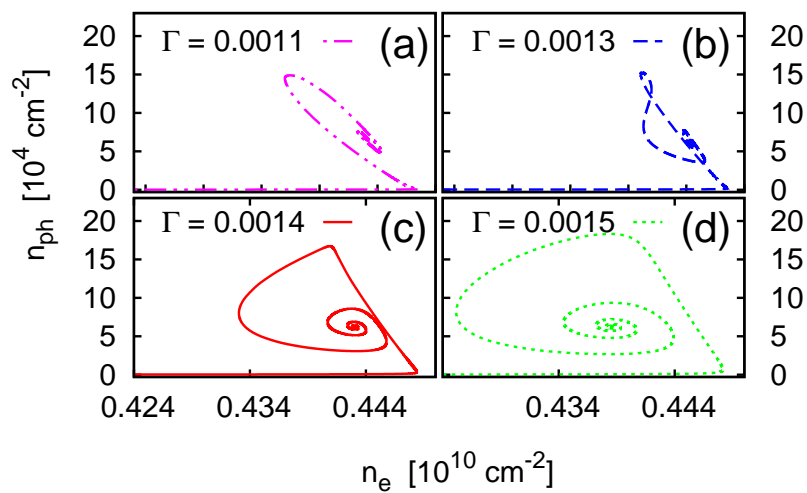
Abbildung 7.6.: Relaxationsoszillationen für den stark gedämpften ($\Gamma = 0.0011$) und den oszillatorischen Fall ($\Gamma = 0.0015$); (a): Zeitserien für $\Gamma = 0.0011$ und $\Gamma = 0.0015$; (b): Frequenzen der Relaxationsoszillationen: $\nu_{RO}(\Gamma = 0.0011) = 2.1 \text{ GHz}$ und $\nu_{RO}(\Gamma = 0.0015) = 2.9 \text{ GHz}$. Stromdichten: $j = 2.5 \cdot j_{th}(\Gamma)$, $j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 3708 \text{ Acm}^{-2}$, $j_{th}(\Gamma = 0.0015) = 2.407 \text{ Acm}^{-2}$. Andere Parameter wie in Tabelle 5.1.

traldichten für $\Gamma = 0.0011$ und $\Gamma = 0.0015$. Der Strompuls wird für $t = 0$ eingeschaltet. An den Zeitserien sieht man zwei für Halbleiterlaser charakteristische Eigenschaften:

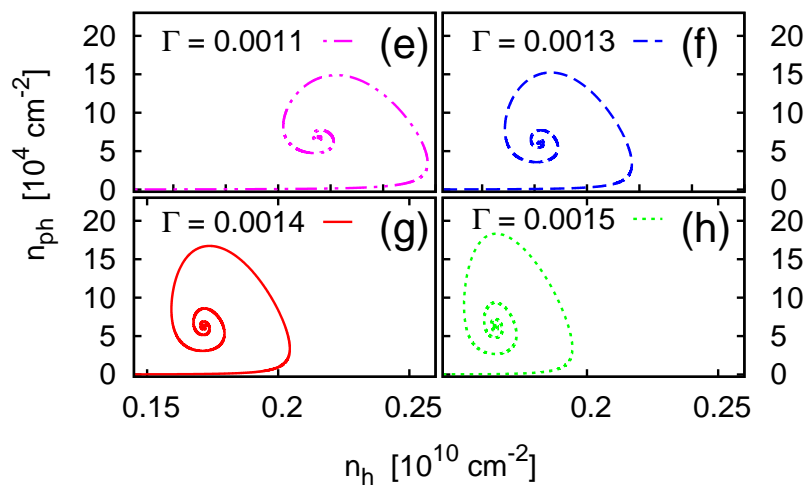
Die Verzögerungszeit, die zu dem Aufbau der Ladungsträgerinversion benötigt wird und die darauffolgenden Relaxationsoszillationen der Photonendichte um den Wert ihres stabilen, stationären Zustands. Für den größeren optischen Füllfaktor $\Gamma = 0.0015$ sind die Relaxationsoszillationen deutlicher ausgeprägt, deshalb wird dieser auch als oszillatorischer Fall bezeichnet. Aufgrund seiner stärker gedämpften Relaxationsoszillationen werden wir die Laserkonfiguration mit $\Gamma = 0.0011$ als stark gedämpften Fall bezeichnen. Für diese Konfiguration beschreibt das Gleichungssystem (7.1) gut das Einschaltverhalten eines Quantenpunktlasers [LUE08], die ausgeprägten Relaxationsoszillationen für $\Gamma = 0.0015$ sind hingegen typisch für das Einschaltverhalten eines Quantentroglasers.

Die Spektren beider Zeitserien in Abb. 7.6 zeigen, dass die Frequenz der Relaxationsoszillationen für den oszillatorischen höher ist als für den stark gedämpften Fall ($\nu_{RO}(\Gamma = 0.0011) = 2.1 \text{ GHz}$ versus $\nu_{RO}(\Gamma = 0.0015) = 2.9 \text{ GHz}$). Dies ist ein weiterer Vorteil von Quantenpunktlasern, denn die Frequenz der Relaxationsoszillationen limitiert die maximale Modulationsfrequenz eines direktmodulierten Lasers [BIM99]. An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass die Frequenz der Relaxationsoszillationen in dem stark gedämpften Fall nicht mehr mit den in [LUE08] publizierten und damit nicht mehr mit den für diese Laserstruktur experimentell gemessenen [KUN05c] Werten übereinstimmt. Dies liegt daran, dass im Gegensatz zu [LUE08] die gesamte Verlustrate κ anstelle von 2κ in die Bewegungsgleichung für die Photonendichte (5.2a) eingeht, da die experimentell gemessene Verlustrate $\kappa = 0.12 \text{ ps}^{-1}$ bereits auf die Intensität $I \propto n_{ph}$ bezogen ist. Dadurch verschieben sich die optischen Füllfaktoren, die das stark gedämpfte und das oszillatorische Regime repräsentieren hin zu niedrigeren Werten. Da die Dynamik des Ratengleichungssystems (5.2) unverändert bleibt, solange das Produkt aus optischen Füllfaktor Γ und Quantenpunktdichte N^{QD} konstant gelassen wird [LUE08], wurde die Quantenpunktdichte von $N^{QD} = 1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ auf $N^{QD} = 0.45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ verringert. Leider verkleinern sich damit die Frequenzen der Relaxationsoszillationen um ca. 800 MHz. Dies müsste in Folgearbeiten durch Anpassung der anderen Parameter (innerhalb der experimentell festgelegten Grenzen) korrigiert werden. So könnten zum Beispiel die internen Verluste $\kappa_{int} = 220 \text{ m}^{-1}$ vergrößert werden. Insgesamt sind die Auswirkungen auf das Gleichungssystem ohne Rückkopplung gering. Mit Rückkopplung wird jedoch in der Bewegungsgleichung für die Phase (6.11b) der Term, der proportional zu dem α -Faktor ist, gegenüber dem Term proportional zu der Rückkopplungsstärke K_{ec} vergrößert. Dies lässt die Phasendynamik und über die Phasen-Amplitudenkopplung auch die Amplitudendynamik sensibler auf Änderungen des α -Faktors reagieren. In Abb. 7.7 sind die Projektionen der Trajektorie während der Anschaltdynamik auf die (n_e, n_{ph}) -Ebene (Abb. 7.7I) und die (n_h, n_{ph}) -Ebene (Abb. 7.7II) für verschiedene optische Füllfaktoren zwischen $\Gamma = 0.0011$ und $\Gamma = 0.0015$ dargestellt.

Wir wollen zuerst auf den Ursprung der „gewöhnlichen“, schwach gedämpften Relaxationsoszillationen in Halbleiterlasern eingehen. Bei diesen zeigt die Photonendichte sowohl in der Projektion auf die (n_e, n_{ph}) -Ebene als auch in der Projektion auf die (n_h, n_{ph}) -Ebene eine spiralförmige Bewegung entgegen des Uhrzeigersinn, die sich auf den Fixpunkt, einen stabilen Fokus, zubewegt. Ein derartiges Verhalten zeigt unser Modell für optische Füllfaktoren $\Gamma \geq 14$ (siehe Abb. 7.7I(c) und (d) für die Dynamik in der (n_e, n_{ph}) -Ebene sowie Abb. 7.7II(g) und (h) für die Dynamik in der (n_h, n_{ph}) -Ebene). Die Dynamik von Elektronen und Löchern ist gekoppelt. Das sieht man be-



I



II

Abbildung 7.7.: Projektionen der Trajektorie auf die (n_e, n_{ph}) -Ebene I und die (n_h, n_{ph}) -Ebene II für optische Füllfaktoren zwischen $\Gamma = 0.0011$ und $\Gamma = 0.0015$. Stromdichten: $j = 2.5 \cdot j_{th}(\Gamma)$ ($j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 3708 \text{ Acm}^{-2}$, $j_{th}(\Gamma = 0.0015) = 2.407 \text{ Acm}^{-2}$). Sonstige Parameter wie in Tabelle 5.1.

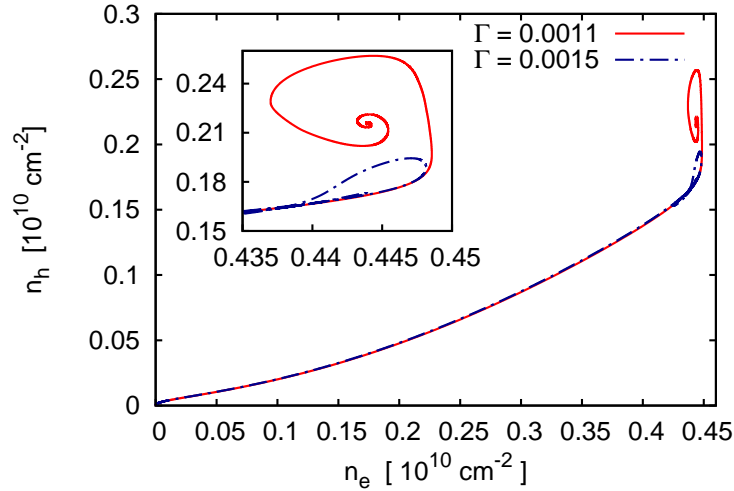


Abbildung 7.8.: Projektionen der Einschaltodynamik auf die (n_e, n_h) -Ebene für das stark gedämpfte ($\Gamma = 0.0011$) und das oszillatorische Regime ($\Gamma = 0.0015$). Schwellstromdichten: $j = 2.5 \cdot j_{th}(\Gamma)$ ($j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 3708 \text{ Acm}^{-2}$, $j_{th}(\Gamma = 0.0015) = 2.407 \text{ Acm}^{-2}$; Sonstige Parameter wie in Tabelle 5.1.

sonders gut, wenn die Einschaltodynamik in der (n_e, n_h) -Ebene betrachtet wird (siehe Abb. 7.8). Aufgrund der Kopplung wird in Modellen für Quantengrabenhalbleiterlaser meistens nur eine Gleichung für die Inversionsdichte $n(t) = n_e(t) + n_h(t) - N^{\text{Val}}$ betrachtet (siehe Abschnitt 3.3) und damit für beide Ladungsträgerarten die gleiche Dynamik angenommen.

Die Relaxationsoszillationen kommen durch ein Wechselspiel der beiden gekoppelten Teilsysteme des Gleichungssystems (7.1), der Photonendichte auf der einen und den Ladungsträgerdichten auf der anderen Seite, zu Stande. Ladungsträger werden in die Benetzungsschicht injiziert und streuen von dort in die Quantenpunkte ein, deren Ladungsträgerdichten sich erhöhen. Dies führt zu einem Aufbau der Ladungsträgerinversion $n(t)$, was die induzierte Emission R_{ind} und die spontane Emission R_{sp} verstärkt. Dadurch steigt die Photonendichte n_{ph} an. Durch die strahlende Rekombination der Ladungsträger und aufgrund der durch das Pauli-Prinzip bei hohen Dichten verringerten Einstreuratzen (siehe (5.7)) werden die Ladungsträgerdichten in den Quantenpunkten wieder verringert, was sich in einer fallenden Photonendichte ausdrückt. Durch die dadurch ermöglichte verstärkte Einstreuung von Ladungsträgern beginnt der Mechanismus von neuem. Durch die exponentielle Dämpfung der Relaxationsoszillationen bewegt sich das System auf seinen Gleichgewichtszustand zu.

Für den stark gedämpften Fall ($\Gamma = 0.0011$) entkoppelt die Dynamik von Elektronen und Löchern in den Quantenpunkten. Dies wird in den Ladungsträger-Photonendichte-Projektionen dadurch ersichtlich, die die Trajektorie in der (n_{ph}, n_h) -Ebene weiterhin eine Rotation entgegen des Uhrzeigersinn vollführt, während die Rotation in der (n_{ph}, n_e) -Ebene nun im Uhrzeigersinn verläuft (vergleiche Abb. 7.7II(e) und Abb. 7.7I(a)). Diese Entkopplung der Dynamik von Elektron- und Löcherdichten in den Quantenpunkten ist auch gut in der (n_e, n_h) -Ebene zu erkennen (siehe Abb. 7.8).

In dem einen Quantenpunktlaser beschreibenden Fall $\Gamma = 0.0011$ ist es also wichtig, eine eigenständige Dynamik für Elektronen und Löcher anzunehmen [LUE09a]. Den Grund für die stark gedämpfte Dynamik erkennt man, wenn man die Gleichgewichtsladungsträgerdichten für $\Gamma = 0.0011$ und $\Gamma = 0.0015$ in Abb. 7.7I(a) und Abb. 7.7I(d) für die Elektronen sowie Abb. 7.7II(e) und Abb. 7.7II(h) für die Löcher miteinander vergleicht. Sie sind für den stark gedämpften Fall wesentlich höher. Dies sieht man auch gut in Abb. 7.5(a) und Abb. 7.5(b). Für die Ladungsträger in den Quantenpunkten stehen strahlende Streuprozesse (induzierte und spontane Emission) mit nicht strahlenden Streuprozessen (Coulomb-Streuung) im Wettstreit. Welche Art von Prozessen überwiegt, hängt von der Kopplungsstärke zwischen den Ladungsträgern in den Quantenpunkten und dem elektrischen Feld in der Kavität ab, die durch den Γ -Faktor beschrieben wird. Für den größeren Γ -Faktor ($\Gamma = 0.0015$) überwiegen strahlende Übergänge. Dadurch werden die Quantenpunktniveaus der Elektronen ständig entleert, was wieder zu stärkerer Einstreuung führt. Dies bewirkt eine stärkere Modulation der Ladungsträgerdichten in den Quantenpunkten während des Einschaltvorganges als für die kleinere Kopplungsstärke $\Gamma = 0.0011$. Über die Ladungsträgerinversion $n(t)$ führt dies zu einer stärkeren Schwankung der optischen Verstärkungsrate $G_{opt}(t) = \frac{\Gamma W A}{2} n(t)$ und damit zu einer stärkeren Modulation der Photonendichte n_{ph} . Es zeigen sich ausgeprägte Relaxationsoszillationen.

Für den kleinen Γ -Faktor ($\Gamma = 0.0011$) überwiegt die Coulomb-Streuung. Das betrachtete Energieniveau der Elektronen in den Quantenpunkten bleibt fast vollständig aufgefüllt. Dadurch sind insgesamt die Wechselwirkungen zwischen Ladungsträgern und elektrischen Feld geringer. Der optische Gewinn $G_{opt}(t)$ variiert weniger. Dies führt zu stark gedämpften Relaxationsoszillationen [LUE09a]. Der hohe Füllgrad der Elektronenzustände in den Quantenpunkten lässt sich bis auf die Einstreuratens der Elektronen S_e^{in} zurückverfolgen. So liegt der Gleichgewichtszustand der Elektronendichte in der Benetzungsschicht $w_{e,s}$ für $\Gamma = 0.0015$ genau an dem Maxima der Einstreureate (vergleiche Abb. 5.3(a)), während er für das kleinere $\Gamma = 0.0011$ zu einer höheren Elektronendichte und damit zu abfallenden Einstreuratens hin verschoben ist.

8. Laserdynamik mit Rückkopplung

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist es sowohl wissenschaftlich als auch technologisch interessant, den Einfluss von optischer Rückkopplung durch einen externen Spiegel auf eine Laserdiode zu studieren. Experimentelle und theoretische Untersuchungen anderer Arbeitsgruppen weisen darauf hin, dass die geringere Sensitivität von Quantenpunktlasern bezüglich optischer Rückkopplung auf zwei Mechanismen zurückzuführen ist: zum einen auf deren im Vergleich zu Quantengrabenlasern geringere Phasen-Amplitudenkopplung und zum anderen auf die im Vergleich zu Quantengrabenlasern geringere Kopplung der Ladungsträgerdichten in den Quantenpunkten mit dem elektrischen Feld in der Kavität. Geringe Phasen-Amplitudenkopplung wird durch kleine α -Faktoren ausgedrückt. Ein kleiner optischer Füllfaktor Γ bewirkt eine schwächere Kopplung von den Ladungsträgerdichten in der aktiven Schicht und dem elektrischen Feld und damit stärker gedämpfte Relaxationsoszillationen (vergleiche Abschnitt 7.3).

Im Folgenden werden wir kurz auf wichtige Resultate anderer Gruppen eingehen. In einer theoretischen Arbeit von O'Brien, Huyet et al. [OBR04, HUY04] zeigt sich, dass eine stärkere Dämpfung der Relaxationsoszillationen die Stabilität der Laserdiode unter Rückkopplung erhöht. Dabei arbeiten die Autoren mit einem erweiterten LK-Modell, das aus drei Bewegungsgleichungen besteht: Je eine für die komplexe Feldamplitude, die Besetzungswahrscheinlichkeit der Quantenpunkte und für die Ladungsträgerdichte in der Benetzungsschicht. Es wird im Gegensatz zu dem in dieser Arbeit betrachteten Modell also keine unterschiedliche Dynamik für Elektronen und Löcher angenommen. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass nicht die Einschränkung eines konstanten α -Faktors gemacht wird, sondern die Ladungsträgerabhängigkeit des Brechungsindex und des Gewinns getrennt voneinander betrachtet werden. Die Abhängigkeit der Rückkopplungssensitivität von der Laserlänge wurde in [CAR05] untersucht. Dabei stellte sich heraus, dass längere Laserdioden empfindlicher auf optische Rückkopplung reagieren. Dies wurde den größeren α -Faktoren und schwächer gedämpften Relaxationsoszillationen längerer Laserdioden zugeschrieben. In einer experimentellen Studie von Carroll et al. [CAR06a] werden die Instabilitäten von Quantenpunktlasern mit Rückkopplung in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke in einem Temperaturbereich von 20°C bis 50°C untersucht. Dabei wird mit zunehmender Rückkopplungsstärke ein stufenweiser Übergang von stabiler zu chaotischer Laseremission beobachtet. Es werden unregelmäßige Intensitätsschwankungen mit Abständen im Millisekunden-Bereich festgestellt, die mit zunehmender Rückkopplungsstärke regelmäßiger werden und in periodische Pulspakete übergehen. Bei weiter ansteigender Rückkopplungsstärke wird die Laseremission schließlich chaotisch. Dabei zeigen sich auf dem Weg in das Chaos höhere Harmonische der Umlauffrequenz der externen Kavität in dem Frequenzspektrum.

Gemäß der Aussage der Autoren sind auf dem Weg in das Chaos mehr Zwischenstufen beobachtbar als bei vergleichbaren Experimenten mit Quantengrabenlasern. Dies begründen sie durch den geringeren α -Faktor und die stärkere Dämpfung der Relaxationsoszillationen. Gleichzeitig stellen sie fest, dass der α -Faktor mit der Temperatur ansteigt. In Übereinstimmung mit den vorher erwähnten Arbeiten zeigt sich, dass der Laser bei höheren Temperaturen schneller instabil wird. Heil et al. [HEI01a, HEI03a] untersuchten in ihren Arbeiten einen Zweisektions-Quantengrabenlaser mit einer kurzen externen Kavität sowohl experimentell als auch theoretisch. Auf die von ihnen beschriebenen Bifurkationsszenarien der Photonendichte in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke und der Phase des rückgekoppelten Lichts werden wir im Vergleich mit den Ergebnissen dieser Arbeit noch genauer eingehen.

Das in dieser Arbeit verwendete Modell ist gut geeignet, den Einfluss der Phasen-Amplitudenkopplung und die Dämpfung der Relaxationsoszillationen auf die Stabilität der Laseremission zu beobachten, da der α -Faktor und optische Füllfaktor Γ separat variiert werden können.

In Abschnitt 8.1 werden zunächst die Fixpunkte des Gleichungssystems mit Rückkopplung bestimmt. Anschließend wird in Abschnitt 8.2 auf die Bifurkationen, die die Laserdiode in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke durchläuft, eingegangen. In Abschnitt 8.3 betrachten wir den Einfluss des α -Faktors und des optischen Füllfaktors Γ auf das Bifurkationsszenario aus Kapitel 8.2. Schließlich wird in Abschnitt 8.4 noch die Stabilität der Laseremission in Abhängigkeit von der Phase, mit der das an dem externen Spiegel reflektierte Licht wieder in die Laserdiode eingekoppelt wird, untersucht.

8.1. Fixpunkte des Gleichungssystems mit Rückkopplung

Für die Analyse der Fixpunkte des Gleichungssystems mit Rückkopplung (6.11) wird der Stromeffizienzfaktor gleich Eins gesetzt ($\eta = 1$). Desweiteren wird wieder das Produkt aus Einsteinkoeffizienten und dem Koeffizienten der spontanen Emission vernachlässigt ($\beta W = 0$). Damit ist unterhalb der Laserschwelle eine „triviale“ Lösung des Gleichungssystems mit $\mathcal{E} \equiv 0$ und den in Abschnitt 7.2.1 errechneten Ladungsträgerdichten stabil. Die Laserschwelle ist durch einen Stabilitätswechsel dieser Lösung gekennzeichnet. Grundlösungen des Gleichungssystems oberhalb der Laserschwelle sind die sogenannten *externen Resonatormoden*, die Lösungen des gekoppelten Systems aus interner und externer Kavität darstellen. Sie zeichnen sich durch konstante Photon- und Ladungsträgerdichten sowie einer Phase, die linear in der Zeit ist, aus [TRO84]

$$(\bar{E}(t), n_e(t), n_h(t), w_e(t), w_h(t))^T = (\sqrt{N_{ph,s}} e^{-i\Delta\omega_s t}, n_{e,s}, n_{h,s}, w_{e,s}, w_{h,s})^T. \quad (8.1)$$

Dabei ist $\Delta\omega_s = \omega_s - \omega_{th}$ die durch die Rückkopplung bewirkte Frequenzverschiebung. Bei den externen Resonatormoden handelt es sich also im Phasenraum betrachtet um kreisförmige periodische Orbits der Periode $2\pi/\Delta\omega_s$. In einer Hyperebene, aufgespannt durch die Photonendichte und die Ladungsträgerdichten sind diese Lösungen nur einzelne Punkte. Deshalb werden sie in der Literatur oft als Fixpunkte bezeichnet. Für kleine Rückkopplungsstärken existiert nur eine externe Resonatormode. Oberhalb einer kritischen Rückkopplungsstärke, werden in Sattel-Knoten-Bifurkationen paarweise

neue Lösungen erzeugt [ROT05]. Von diesen ist die Mode mit der optimalen konstruktiven Interferenz zwischen dem Licht der internen und der externen Kavität stabil. Da diese Mode am nächsten an dem Maximum der optischen Verstärkung $g_{opt}(\omega)$ liegt, wird sie auch als *maximale Gewinn-Mode* bezeichnet [HEI03a]. Mit dem Ansatz der externen Resonatormoden nimmt das Gleichungssystem (6.11) folgende Form an:

$$0 = \{ \Gamma W A(n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) - \kappa \} n_{ph,s} + 2\mathcal{R}_{ec} n_{ph,s} \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta) \quad (8.2a)$$

$$\Delta\omega_s = \frac{\alpha}{2} \{ \Gamma W A(n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) - \kappa \} - \mathcal{R}_{ec} \sin(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta) \quad (8.2b)$$

$$0 = -\frac{n_{e,s}}{\tau_e} + S_e^{\text{in}} N^{QD} - W A(n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) n_{ph,s} - \frac{W}{N^{QD}} n_{e,s} n_{h,s} \quad (8.2c)$$

$$0 = -\frac{n_{h,s}}{\tau_h} + S_h^{\text{in}} N^{QD} - W A(n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) n_{ph,s} - \frac{W}{N^{QD}} n_{e,s} n_{h,s} \quad (8.2d)$$

$$0 = \eta(w_{e,s}) \hat{j}(t) + \frac{n_{e,s}}{\tau_e} \frac{N^{\text{WL}}}{N^{QD}} - S_e^{\text{in}} N^{\text{WL}} - \frac{W}{N^{\text{WL}}} w_{e,s} w_{h,s} \quad (8.2e)$$

$$0 = \eta(w_{e,s}) \hat{j}(t) + \frac{n_{h,s}}{\tau_h} \frac{N^{\text{WL}}}{N^{QD}} - S_h^{\text{in}} N^{\text{WL}} - \frac{W}{N^{\text{WL}}} w_{e,s} w_{h,s}. \quad (8.2f)$$

Dabei wurde noch die Verlustrate der externen Kavität

$$\mathcal{R}_{ec} = \frac{K_{ec}}{\tau_{in}} = \frac{1}{\tau_{in}} (1 - R_2) \sqrt{\frac{R_{ec}}{R_2}} \quad (8.3)$$

eingeführt. Die hier gewählte Formulierung betont, dass die Phase $\Theta = \omega_{th} \tau_{ec}$, mit der das Licht in die interne Kavität zurückgekoppelt wird, als eigenständige dynamische Variable betrachtet werden kann. Dies ist gerechtfertigt, da die Phase durch Veränderung der Länge der externen Kavität im Wellenlängenbereich ($\lambda = 1.3 \mu\text{m}$) beliebig eingestellt werden kann, während der Einfluss der Längenänderung auf die Umlaufzeit in der externen Kavität $\tau_{ec} = 2l/c$ vernachlässigbar ist. Die Gültigkeit dieser Annahme ist experimentell in [HEI03a] bestätigt worden. Auch im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Simulationen zeigen, dass diese Annahme mit dem betrachteten Modell vereinbar ist. In integrierten Strukturen kann die Phase des rückgekoppelten Lichts Θ über einen schwachen Strom in der passiven Sektion reguliert werden. Die numerische Integration des Gleichungssystem (6.11) zeigt, dass im Bereich kurzer externer Kavitäten von einigen Zentimetern Länge, die Stabilität der Laseremission von Θ abhängig ist. Dies ist auch experimentell und numerisch in [HEI01a] für einen Quantengrabenlaser mit kurzer externer Kavität festgestellt worden. Bei längeren Kavitäten ist die Stabilität der Laseremission unabhängig von der Phase des rückgekoppelten Lichts [KAN05]. Deshalb wird in vielen Veröffentlichungen für das Argument der trigonometrischen Funktionen ξ in (8.2a) und (8.2b) die Formulierung

$$\xi := \Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta = \omega_s \tau_{ec}$$

gewählt [TKA86, SCH88]. Oberhalb der Laserschwelle ($n_{ph} \neq 0$) erhält man durch Umstellen der Gleichung für die Photonendichte (8.2a) eine Formel für die rückkopp-

lung induzierte Gewinnabweichung

$$\begin{aligned} n_{ph,s} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad G_{opt} - G_{opt,th} &= \frac{\Gamma W A}{2} (n_{e,s} + n_{h,s} - N^{QD}) - \frac{\kappa}{2} \\ &= -\mathcal{R}_{ec} \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Bei günstiger Wahl der Phase Θ des rückgekoppelten Lichts oder der Länge der externen Kavität l kann also eine Erniedrigung der Laserschwelle gegenüber der Laserdiode ohne Rückkopplung erreicht werden. Deshalb wird in experimentellen Veröffentlichungen oft die Reduktion der optischen Verstärkung (Gewinnreduktion) zur Charakterisierung der Rückkopplung verwendet. Wird (8.4) in (8.2b) eingesetzt, erhält man eine transzendente Bestimmungsgleichung für die möglichen Frequenzen der externen Resonatormoden

$$\boxed{\Delta\omega_s = -\mathcal{R}_{ec} \left(\alpha \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta) + \sin(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta) \right)}. \quad (8.5)$$

Auf diese werden wir später in diesem Abschnitt genauer eingehen. Als nächstes wird die Photonendichte in Abhängigkeit der Stromdichte und der Ladungsträgerdichten formuliert. Einsetzen von (8.4) in (8.2c) liefert analog zu dem Fall ohne Rückkopplung

$$n_{ph,s} = \frac{\Gamma}{\kappa - 2\mathcal{R}_{ec} \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta)} \left\{ -\frac{n_{e,s}}{\tau_e} + S_e^{\sin} N^{QD} + \frac{W}{N^{QD}} n_{e,s} n_{h,s} \right\}. \quad (8.6)$$

Die Stromdichteabhängigkeit der Photonendichte wird deutlich, wenn (8.2e) in (8.6) eingesetzt wird

$$\begin{aligned} n_{ph,s} &= \frac{\Gamma \epsilon}{\kappa - 2\mathcal{R}_{ec} \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta)} \cdot \left\{ \hat{j} - \frac{W}{N^{WL}} w_{e,s} w_{h,s} - \frac{N^{WL} W}{(N^{QD})^2} n_{e,s} n_{h,s} \right\} \end{aligned} \quad (8.7a)$$

$$\approx \frac{\Gamma \epsilon \hat{j}_{th}}{\kappa - 2\mathcal{R}_{ec} \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta)} \left\{ \frac{\hat{j} - \hat{j}_{th}}{\hat{j}_{th}} \right\}. \quad (8.7b)$$

Bei dem Übergang von (8.7a) zu (8.7b) wurde angenommen, dass auch mit Rückkopplung die Ladungsträgerdichten nicht wesentlich von ihren Schwellwerten ohne Rückkopplung abweichen. Dies sollte bei schwacher Rückkopplung gewährleistet sein. Gleichung (8.7b) ist die Darstellung einer Ellipse in Polarkoordinaten. Dabei bildet die Photonendichte den Radius der Ellipse und der Winkel ist durch $\xi := \Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta$ gegeben. Für festes Θ , τ_{ec} und \hat{j} sind Photonendichten mit nach Gleichung (8.5) zulässigen Frequenzverschiebungen $\Delta\omega_s$ Punkte auf der Ellipse. Die Annahme, dass die Ladungsträgerdichten in guter Näherung auf ihre Schwellwerte gesetzt werden können, wird durch die im Folgenden berechneten Näherungen für die Ladungsträgerdichten nachträglich gerechtfertigt. Deren Berechnung erfolgt analog zum Fall ohne Rückkopplung in Abschnitt 7.2.2. Für explizite Rechnungen werden im Folgenden die Parameter aus den Tabellen 8.1 und 5.1 verwendet. Dabei wird für die maximale Verlustrate der externen Kavität \mathcal{R}_{ec}^{\max} (siehe (8.3)) die Reflektivität des externen Spiegels $R_{ec} = 1$ gesetzt. Die damit erreichte Rückkopplungsstärke $K_{ec} = 1.2$ liegt deutlich außerhalb

des Gültigkeitsbereichs des LK-Modells ($K_{ec} \leq 0.3$). Die durch die Rückkopplung bewirkten Modifikationen der Ladungsträgerdichten sind proportional zu \mathcal{R}_{ec} . Daher ist der Einfluss der Rückkopplung auf die Ladungsträgerdichten innerhalb des Gültigkeitsbereichs des LK-Modells deutlich geringer als seine im Folgenden berechneten oberen Grenzen.

Größe	Bezeichnung	Zahlenwert
Länge des Lasers	L	1 mm
Länge der ext. Kavität	l	25 mm
Optischer Füllfaktor	Γ	0.0011
Umlaufzeit in int. Kavität	τ_{in}	24 ps
Umlaufzeit in ext. Kavität	τ_{ec}	160 ps
Reflektivität des ext. Spiegels	R_{ec}	1
Ladungsträgerlebensdauern	τ_e, τ_h	5 ps, 10 ps
Max. Verlustrate der ext. Kavität	\mathcal{R}_{ec}^{\max}	0.05 ps^{-1}
Photonendichte	$n_{ph,s}$	$7.1 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$

Tabelle 8.1.: In den expliziten Rechnungen des Abschnittes 8.1 verwendete Parameterwerte.

Aus der Gleichung für die Gewinnabweichung (8.4) erhält man die Löcherdichte in den Quantenpunkten in Abhängigkeit der Frequenzverschiebung $\Delta\omega_s$, der Rückkopplungsphase Θ und der Quantenpunkt-Elektronendichte $n_{e,s}$ zu

$$n_{h,s}(\Delta\omega_s, \Theta, n_{e,s}) = -\frac{2\mathcal{R}_{ec}}{\Gamma W A} \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta) + \frac{\kappa}{\Gamma W A} + N^{QD} - n_{e,s} \quad (8.8a)$$

$$\approx \frac{\kappa}{\Gamma W A} + N^{QD} - n_{e,s}. \quad (8.8b)$$

Ein Vergleich des durch die Rückkopplung verursachten Terms von (8.8a) mit dem nachfolgenden Term liefert

$$\left| \frac{2\mathcal{R}_{ec}}{\Gamma W A} \cos(\xi) \right| \leq \frac{2\mathcal{R}_{ec}^{\max}}{\Gamma W A} = \left(\frac{2\mathcal{R}_{ec}^{\max}}{\kappa} \right) \cdot \frac{\kappa}{\Gamma W A} \approx 0.8 \cdot \left(\frac{\kappa}{\Gamma W A} \right) = 0.8 \cdot 2.3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}.$$

In erster Näherung kann bei kleinen Rückkopplungsstärken der Einfluss der Rückkopplung auf die Löcher vernachlässigt werden. Für die Differenz der Ladungsträgerdichten in den Quantenpunkten ergibt sich mit (8.2c), (8.2d) und der Gleichung für die Gewinnabweichung (8.4):

$$n_{e,s} - n_{h,s} = N^{QD} (\tau_e S_e^{\text{in}} - \tau_h S_h^{\text{in}}) - (\tau_e - \tau_h) \cdot \quad (8.9a)$$

$$\cdot \left\{ \left(\frac{n_{e,s}}{N^{QD}} \right) n_{h,s} W + \left(\frac{\kappa}{\Gamma} - \frac{2\mathcal{R}_{ec}}{\Gamma} \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta) \right) n_{ph,s} \right\} \quad (8.9b)$$

$$\approx N^{QD} (\tau_e S_e^{\text{in}} - \tau_h S_h^{\text{in}}). \quad (8.9c)$$

Die ersten beiden Terme in geschweiften Klammern von (8.9b) wurden bereits in (7.16) als vernachlässigbar angesehen. Der den Effekt der Rückkopplung beschreibende letzte

Term von (8.9b) ist ebenfalls vernachlässigbar klein gegenüber dem dominierenden Term $\tau_e S_e^{\text{in}} N^{QD} \approx N^{QD}$, denn es gilt

$$\left| \tau_h \frac{2\mathcal{R}_{ec}}{\Gamma} n_{ph,s} \cos(\xi) \right| \leq \tau_h \frac{2\mathcal{R}_{ec}^{\text{max}}}{\Gamma} \left(\frac{n_{ph,s}}{N^{QD}} \right) N^{QD} \approx 0.18 \cdot (7.1 \cdot 10^{-2}) N^{QD} = 0.012 \cdot N^{QD}$$

Da $n_{h,s}$ bereits in Abhängigkeit von $n_{e,s}$ ausgedrückt wurde, liefert Gleichung (8.9a) eine implizite Bestimmungsgleichung für $n_{e,s}$ in Abhängigkeit der Ladungsträgerdichten in der Benetzungsschicht sowie $\Delta\omega_s$ und Θ

$$\begin{aligned} n_{e,s}(\Delta\omega_s, \Theta, w_{e,s}, w_{h,s}) &= n_{h,s}(n_{e,s}, \Delta\omega_s, \Theta) + N^{QD} (\tau_e S_e^{\text{in}} - \tau_h S_h^{\text{in}}) \\ &\quad - (\tau_e - \tau_h) \left\{ \left(\frac{n_{e,s}}{N^{QD}} \right) n_{h,s} W \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\kappa}{\Gamma} - \frac{2\mathcal{R}_{ec}}{\Gamma} \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta) \right) n_{ph,s} \right\}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Über die Ladungserhaltung (7.4) kann nun eine implizite Bestimmungsgleichung von $w_{h,s}$ in Abhängigkeit von $w_{e,s}$, $\Delta\omega_s$ und Θ formuliert werden

$$\begin{aligned} w_{h,s}(w_{e,s}, \Delta\omega_s, \Theta) &= w_{e,s} - \frac{N^{\text{WL}}}{N^{QD}} (n_{e,s} - n_{h,s}) \\ &= w_{e,s} + N^{\text{WL}} (\tau_e S_e^{\text{in}} - \tau_h S_h^{\text{in}}) + (\tau_e - \tau_h) \frac{N^{\text{WL}}}{N^{QD}} \cdot \end{aligned} \quad (8.11a)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \left\{ \frac{n_{e,s}}{N^{QD}} n_{h,s} W + \left(\frac{\kappa}{\Gamma} - \frac{2\mathcal{R}_{ec}}{\Gamma} \cos(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta) \right) n_{ph,s} \right\} \\ &\approx w_{e,s} N^{\text{WL}} (\tau_e S_e^{\text{in}} - \tau_h S_h^{\text{in}}). \end{aligned} \quad (8.11b)$$

Es fehlt noch ein Ausdruck für die Elektronendichte in der Benetzungsschicht $w_{e,s}$ in Abhängigkeit der Pumpstromdichte j . Da alle anderen Ladungsträgerdichten bereits in Abhängigkeit von $w_{e,s}$ formuliert wurden, liefert Addition von (8.2e) und (8.2f)

$$0 = 2\hat{j} + N^{\text{WL}} \left(\frac{1}{N^{QD}} \left(\frac{n_{e,s}}{\tau_e} + \frac{n_{h,s}}{\tau_h} \right) - (S_e^{\text{in}} + S_h^{\text{in}}) \right) - 2 \frac{W}{N^{\text{WL}}} w_{e,s} w_{h,s}. \quad (8.12)$$

Zusammenfassend können mit Hilfe der Gleichungen (8.5), (8.7a), (8.8a), (8.10), (8.11a) und (8.12) die stationären Zustände des Gleichungssystems mit Rückkopplung errechnet werden.

Abschließend sei noch erwähnt, dass die Wirkung der optischen Rückkopplung auf die Ladungsträgerdichten mit den genäherten Beziehungen nicht verstanden werden können, da gerade der Einfluss der Rückkopplung auf die Ladungsträgerdichten vernachlässigt wird. Ob die Näherungen zur Bestimmung der Stabilität der einzelnen Moden genügen, muss noch näher untersucht werden.

8.1.1. Bedingung für die Existenz mehrerer Resonatormoden

In diesem Abschnitt wird näher auf die transzendente Gleichung für die Frequenzverschiebung $\Delta\omega_s$ der Laserdiode mit Rückkopplung zu ihrer Schwellwertfrequenz (8.5)

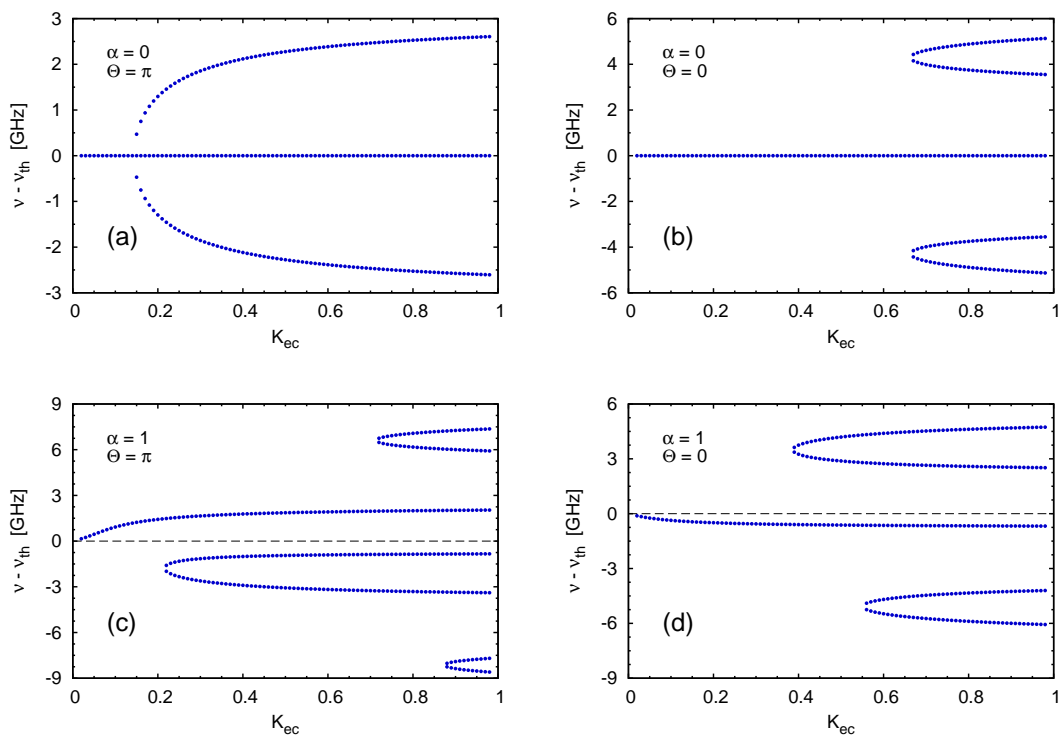


Abbildung 8.1.: Mögliche Frequenzverschiebungen in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke K_{ec} (Lösungen der Gleichung (8.5)) für $\alpha = 0$ ((a) und (b)) sowie $\alpha = 1$ ((c) und (d)) jeweils für gleichphasige ($\Theta = 0$) und gegenphasige Wiedereinkopplung ($\Theta = \pi$) des Lichts in die Laserdiode. Parameter wie in den Tabellen 8.1 und 5.1.

eingegangen. Aus ihr lassen sich bei fester Rückkopplungsstärke K_{ec} , Phase des rückgekoppelten Lichts Θ und Umlaufzeit in der externen Kavität τ_{ec} die möglichen Frequenzverschiebungen errechnen. Abb. 8.1 zeigt numerische Lösungen der Gleichung (8.5) für verschiedene Werte von α und Θ . Lösungen werden, wie in dem gewöhnlichen LK-Modell in [ROT05, ALS96], in Sattel-Knoten-Bifurkationen erzeugt. Der Bifurkationsparameter ist dabei K_{ec} . Daher treten neue Lösungen immer paarweise auf. Die stabilen Knoten-Lösungen werden als Moden, die instabilen Sattel-Lösungen als Antimoden bezeichnet [TAR98].

Gleichung (8.5) kann noch in eine anschaulichere Form gebracht werden:

$$\Delta\omega_s = -\frac{K_{\text{eff}}}{\tau_{ec}} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cos(\Delta\omega_s\tau_{ec} + \Theta) + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \sin(\Delta\omega_s\tau_{ec} + \Theta) \right) \quad (8.13a)$$

$$= -\frac{K_{\text{eff}}}{\tau_{ec}} \sin(\Delta\omega_s\tau_{ec} + \Theta + \arctan(\alpha)). \quad (8.13b)$$

In Gleichung (8.13a) wurde eine effektive Rückkopplungsstärke

$$K_{\text{eff}} = \mathcal{R}_{ec}\tau_{ec}\sqrt{1+\alpha^2} = K_{ec}\frac{\tau_{ec}}{\tau_{in}}\sqrt{1+\alpha^2} \quad (8.14)$$

eingeführt und zu der Herleitung von (8.13b) ein Additionstheorem und die trigonometrischen Beziehungen

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

verwendet. Nun sieht man, dass Lösungen der Gleichung (8.13b) Schnittpunkte der Graphen der Funktionen

$$f(\Delta\omega_s) = -\frac{K_{\text{eff}}}{\tau_{ec}} \sin(\Delta\omega_s\tau_{ec} + \Theta + \arctan(\alpha)) \quad \text{und} \quad g(\Delta\omega_s) = \Delta\omega_s$$

sind. Die Sinusfunktion f hat die Amplitude K_{eff}/τ_{ec} . Für kleine effektive Rückkopplungsstärken hat sie nur einen Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden g . Der Zweisektionslaser emittiert auf einer Frequenz, die leicht je nach Rückkopplungsphase Θ positiv oder negativ gegenüber der Frequenz der Laserdiode ohne Rückkopplung verschoben ist (vergleiche Abb. 8.1). Bei höheren Rückkopplungsstärken kommen weitere Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen hinzu. Dies ist in Abb. 8.2 dargestellt. Dabei werden neue Lösungen paarweise erzeugt. Da neue Schnittpunkte abwechselnd in dem ersten ($f > 0$) und dem dritten Quadranten $f < 0$ auftreten, sind die Frequenzen der neuen Lösungen abwechselnd positiv und negativ zu der Frequenz der solitären Laserdiode verschoben. In Abb. 8.1(b) fällt die Erzeugung zweier Moden-Antimoden-Paare auf den gleichen Wert der Rückkopplungsstärke K_{ec} , da f für $\Theta = 0$ und $\alpha = 0$ einen unverschobenen Sinus darstellt. Eine notwendige Bedingung für die Sattel-Knoten-Bifurkation ist, dass die Ableitungen von f und g übereinstimmen

$$\frac{df}{d(\Delta\omega_s)} = \frac{dg}{d(\Delta\omega_s)}.$$

Differenzieren von (8.13b) liefert

$$\cos(\Delta\omega_s\tau_{ec} + \Theta + \arctan(\alpha)) = -\frac{1}{K_{\text{eff}}}. \quad (8.15)$$

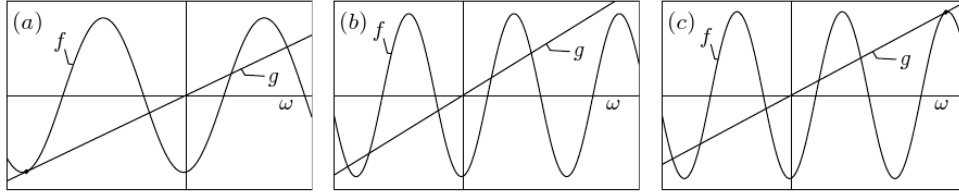


Abbildung 8.2.: Graphische Lösung der transzendenten Gleichung (8.13b) für verschiedene effektive Rückkopplungsstärken K_{eff} . Die Frequenzverschiebung ist im Gegensatz zum Text mit ω anstelle von $\Delta\omega_s$ bezeichnet. In Abbildung (a) wird ein Lösungspaar mit $f < 0$ erzeugt, in (c) ein Lösungspaar mit $f > 0$ und (b) stellt eine generische Situation dar. Abbildung entnommen aus [ROT05].

Daran erkennt man die Bedeutung der effektiven Rückkopplungsstärke K_{eff} . Gleichung (8.15) hat nur Lösungen für $K_{\text{eff}} \geq 1$. Für $K_{\text{eff}} < 1$ existiert immer nur eine Lösung der transzendenten Gleichung für die Frequenzverschiebung (8.13b). Dies ist die externe Resonatormode, die aus der Lösung der solitären Laserdiode entsteht. Um Verwirrungen zu vermeiden, soll noch darauf hingewiesen werden, dass die möglichen Frequenzverschiebungen $\Delta\omega_s$ der externen Resonatormoden nicht den Frequenzen der zeitlichen Modulation der Photonendichte $n_{ph}(t)$ entsprechen, die in Kapitel 8.2 behandelt werden. Die Frequenzverschiebungen $\Delta\omega_s$ der externen Resonatormoden beschreiben die Abweichung der Frequenz des gesamten elektrischen Feldes (in der Form einer rotierenden Welle $\vec{E} = \sqrt{N_{ph,s}} e^{-i(\Delta\omega_s + \omega_{th})t}$) von der Schwellwertfrequenz der solitären Laserdiode ω_{th} . Die Spektren der Photonendichte in Kapitel 8.2 zeigen hingegen die Oszillationsfrequenzen der Photonendichte $n_{ph}(t) = |\mathcal{E}(t)|^2/A$, die in dem Ansatz externer Resonatormoden konstant ist.

8.1.2. Der Unterschied langer und kurzer externer Kavitäten

Ein wichtiger Unterschied zwischen langen und kurzen Kavitäten ist, dass bei letzteren die Laserdynamik stark abhängig von der Phase des rückgekoppelten Lichts Θ ist [HEI03a].

Bezüglich der externen Resonatormoden zeichnen sich kurze Kavitäten dadurch aus, dass auch bei höheren Rückkopplungsstärken nur wenige externe Resonatormoden existieren. Dies sieht man am besten an der transzendenten Gleichungen (8.5), durch die die möglichen Frequenzverschiebungen zu ω_{th} bestimmt werden. Leicht umgestellt ergibt diese

$$\Delta\omega_s \tau_{ec} = -K_{\text{eff}} \sin\left(\Delta\omega_s \tau_{ec} + \Theta + \arctan(\alpha)\right). \quad (8.16)$$

Betrachten wir die dimensionslose Variable $\Delta\omega_s \tau_{ec}$, so sind Lösungen von (8.16) Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit einer verschobenen Sinusfunktion. Diese hat die

effektive Rückkopplungsstärke $K_{\text{eff}} = K_{ec}(\tau_{ec}/\tau_{in})\sqrt{1 + \alpha^2}$ als Amplitude. Je größer die Amplitude der Sinusfunktion ist, desto mehr Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden existieren (siehe Abb. 8.2). Die Größe der Amplitude hängt zum einen von dem α -Faktor und zum anderen von dem Verhältnis der Umlaufzeiten τ_{ec}/τ_{in} des Lichts in der externen und in der internen Kavität ab. Da dieses in kurzen Kavitäten deutlich kleiner als in langen ist, existieren in kurzen Kavitäten weniger externe Resonatormoden. Dies ist ein Grund für die unterschiedliche Dynamik in den beiden Regimen [KAN05]. Der Begriff einer „kurzen Kavität“ wird nun genauer definiert. Schunk und Petermann untersuchten in [SCH89] theoretisch mit einem LK-Modell den Übergang in das Kohärenzkollapsregime in Abhängigkeit von der Rückkopplungsstärke und der Länge der externen Kavität. Der Kohärenzkollaps zeichnet sich durch eine Verbreiterung der Linienbreite und einer deutlichen Zunahme des relativen Intensitätsrauschens der Laserdiode aus [KAN05]. Dies führt zu einer Abnahme der Kohärenzlänge des Laserlichts. Sie stellten fest, dass die Grenze zwischen stabiler Laseremission und dem Kohärenzkollapsregime erst unterhalb einer bestimmten Länge der externen Kavität mit der Kavitätslänge variiert. Diese ist erreicht, wenn das Produkt aus der Frequenz der Relaxationsoszillationen τ_{ec} und der Umlaufzeit in der externen Kavität $\tau_{ec} = 2l/c$ größer als Eins ist

$$\nu_{\text{RO}}\tau_{ec} > 1.$$

Anders formuliert bedeutet dies, dass die Grundfrequenz der externen Kavität $\nu_{ec} = c/2l$ höher sein muss als die Frequenz der Relaxationsoszillationen

$$\boxed{\nu_{\text{RO}} < \nu_{ec}.} \quad (8.17)$$

Dies ist die Definition einer kurzen Kavitäten von Schunk und Petermann.

Ein andere Definition wurde von Jones et al. eingeführt [JON01]. Nach ihrer Definition ist eine Kavität kurz, wenn der Übergang in das Kohärenzkollapsregime abhängig von der Rückkopplungsphase ist. Diese Definition beruht auf einer theoretischen Untersuchung der Autoren mit einem LK-Modell. Sie fanden, dass sich im Regime kurzer Kavitäten „instabile Inseln“ in der Ebene aus Rückkopplungsstärke und Phase des rückgekoppelten Lichts bilden. Das Verschmelzen der Inseln bei zunehmender Länge der externen Kavität zeigt, dass das System unabhängig von der Phase des rückgekoppelten Lichts wird.

Experimentell und theoretisch untersuchten Heil et al. einen Quantengrabenlaser mit kurzer externer Kavität nach der Definition von Schunk und Petermann (8.17). Sie beobachteten während eines Zyklus der Phase des rückgekoppelten Lichts von $-\pi$ bis π einen Übergang von stabiler stationärer Laseremission zu entdämpften Relaxationsoszillationen, weiter zu regulären Pulspaketen und wieder zurück zu stabiler Laseremission [HEI01a, HEI03a]. Dies konnten sie theoretisch mit dem LK-Modell gut beschreiben. Im Vergleich mit den hier gefundenen Ergebnissen werden wir in Abschnitt 8.4 näher auf ihre Ergebnisse eingehen.

8.2. Bifurkationen in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke

In diesem Abschnitt werden Bifurkationen des dynamischen Verhaltens des Lasers, die durch Änderung der Rückkopplungsstärke K_{ec} hervorgerufen werden, untersucht. Die Dynamik wird durch das Gleichungssystem (6.11) beschrieben. In den folgenden Bifurkationsdiagrammen wird die Photonendichte n_{ph} in Abhängigkeit von der Rückkopplungsstärke K_{ec} analysiert. Dazu werden bei ausgewählten Rückkopplungsstärken die Zeitserien, Spektraldichten sowie Projektionen der Phasenraumdynamik auf die (n_{ph}, n_e) - und (n_{ph}, n_h) -Ebenen betrachtet. In diesem Abschnitt wird der Fall kleiner Phasen-Amplituden-Kopplung ($\alpha = 1$) und stark gedämpfter Relaxationsoszillationen ($\Gamma = 0.0011$) betrachtet. Für diese Parameterwerte beschreibt das Modell einen Quantenpunktlaser (siehe Kapitel 7.3). Die Phase des rückgekoppelten Lichts Θ ist auf den Wert $\Theta = \pi$ festgesetzt. Damit wird das Licht nach einem Umlauf in der externen Kavität gegenphasig wieder in die Laserdiode eingekoppelt. Die Länge der externen Kavität beträgt $l = 25$ mm. Wir betrachten damit den Bereich kurzer Kavitäten nach der Definition (8.17), denn es gilt $\nu_{RO} \approx 2.1$ GHz $<$ $\nu_{ec} \approx 6$ GHz (vergleiche Abb. 8.6). Die übrigen Parameter werden wie in den Tabellen 5.1 und 8.1 gewählt. Die Ergebnisse werden mit zwei Arbeiten von Heil et al. verglichen [HEI01a, HEI03a], in denen die Dynamik eines Quantengrabenlasers unter externer Rückkopplung in dem Regime kurzer Kavitäten untersucht wird.

8.2.1. Begriffe aus der Bifurkationstheorie

In diesem Abschnitt werden Begriffe aus der Bifurkationstheorie erklärt, um ein besseres Verständnis der folgenden Simulationsergebnisse zu ermöglichen. Es werden nur dynamische Systeme mit kontinuierlicher zeitlicher Entwicklung behandelt, beschrieben durch gewöhnliche Differentialgleichungen.

Hopfbifurkation

Bei einer superkritischen Hopfbifurkation wird ein dynamisches System in der Nähe eines stabilen Fokus betrachtet. An der Bifurkation überqueren zwei zueinander komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{\pm} = \gamma \pm i\tilde{\omega}$ der Linearisierung des dynamischen Systems simultan die imaginäre Achse der komplexen Ebene. Ihr Realteil wechselt dabei von negativen zu positiven Werten. Da die Realteile der Eigenwerte der Dämpfung der zugehörigen Eigenmode entsprechen, wird diese bei der Bifurkation entdämpft. Es entsteht ein stabiler isolierter periodischer Orbit (stabiler Grenzzyklus) und der Fokus wird instabil. Dieser Vorgang ist in Abb. 8.3(a) dargestellt. Charakteristisch für eine superkritische Hopfbifurkation ist, dass in unmittelbarer Nähe des Bifurkationspunktes der Radius r des entstandenen Orbits wurzelförmig mit dem Abstand des Bifurkationsparameters K_{ec} zu seinem kritischen Wert K_c ansteigt [STR94a]

$$r(K_{ec}) \propto \sqrt{K_{ec} - K_c} \quad \text{für } K_{ec} > K_c.$$

Vor einer subkritischen Hopfbifurkation existieren in dem betrachteten Bereich des Phasenraumes ein stabiler Fokus, der von einem instabilen Grenzzyklus umgeben ist.

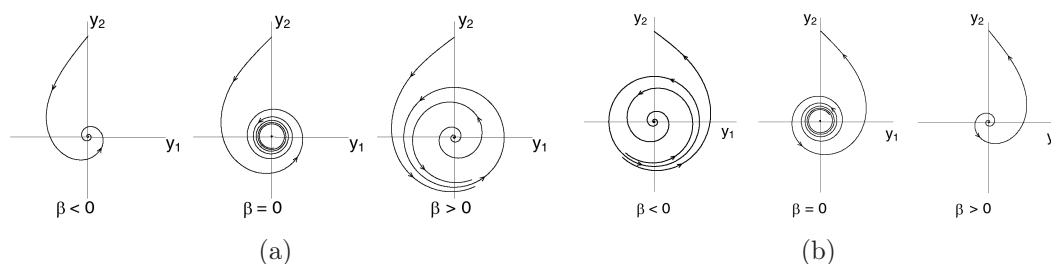


Abbildung 8.3.: Super- und subkritische Hopfbifurkation. (a): Superkritische Hopfbifurkation. Für Werte des Bifurkationsparameters $\beta < 0$ existiert nur ein stabiler Fokus im Ursprung. Die Bifurkation findet bei $\beta = 0$ statt. Bei Werten von $\beta > 0$ koexistieren ein stabiler periodischer Orbit und ein instabiler Fokus im Ursprung. (b): Subkritische Hopfbifurkation. Für Werte von $\beta < 0$ koexistieren ein stabiler Fokus in dem Ursprung umgeben von einem instabilen Grenzzyklus. Für $\beta > 0$ existiert nur noch ein instabiler Fokus im Ursprung. Abbildungen nach [KUZ95].

Bei der Bifurkation verschwindet der instabile Grenzzyklus und der Fokus wird instabil (siehe Abb. 8.3(b)).

Attraktor

Anschaulich formuliert sind Attraktoren Bereiche des Phasenraumes, zu denen nahegelegene Trajektorien konvergieren. Attraktoren können einerseits nach ihrer Dimension klassifiziert werden. Ein stabiler Fixpunkt ist ein nulldimensionaler, ein periodischer Orbit ein eindimensionaler und ein Torus ein zweidimensionaler Attraktor. Es gibt andererseits Attraktoren mit nicht ganzzahliger fraktaler geometrischer Dimension, die seltsame Attraktoren genannt werden. Ein seltsamer Attraktor besteht aus einer Menge von Punkten, die in einer endlichen Teilmenge des Phasenraumes eingebettet ist. Trajektorien, die in die Nähe des Attraktors kommen, werden in die Region hineingezogen [SCH87, SCH00]. Diese Umgebung des Attraktors wird als sein Attraktionsbasin bezeichnet. Zum anderen können Attraktoren aber auch durch das Verhalten der in ihnen verlaufenden Trajektorien kategorisiert werden. Ein Attraktor ist chaotisch, wenn ursprünglich nah beieinanderliegende Trajektorien im zeitlichen Mittel exponentiell divergieren. Das Frequenzspektrum einer chaotischen Bewegung weist im Gegensatz zu dem einer periodischen Bewegung nicht einzelne diskrete, sondern ein Kontinuum von Frequenzen auf [HIL94]. Es gibt mehrere Wege in das Chaos, beschrieben durch verschiedene Bifurkationsszenarien. Einige in dieser Arbeit benötigten Wege werden im Folgenden vorgestellt.

Periodenverdoppelungsbifurkation

Bei Periodenverdoppelungsbifurkationen handelt es sich um eine Bifurkation eines periodischen Orbits. An dem kritischen Wert des Kontrollparameters K_{ec} wird der periodische Orbit instabil und geht in einen periodischen Orbit über, auf dem das System doppelt so lange braucht um wieder an seinen Anfangspunkt zurückzukehren, wie auf

dem ursprünglichen. Dabei halbiert sich die Frequenz der Schwingung und ihre Periode verdoppelt sich. Die Projektion der Trajektorie auf eine geeignete Ebene zeigt eine doppelte Schleife (siehe z.B. Abb. 8.8(c)). Wird der Kontrollparameter K_{ec} weiter variiert, kann das System weitere Periodenverdoppelungsbifurkationen durchlaufen. Dabei konvergieren die Werte des Kontrollparameters an den Bifurkationspunkten $K_{c,i}$ mit $i = 1, 2, 3, \dots$ gegen einen Grenzwert $K_{c,\infty}$, an dem das System chaotisch wird. Für die Folge der kritischen Werte gilt folgende Gesetzmäßigkeit [KUZ95]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{c,n+1} - K_{c,n}}{K_{c,n+2} - K_{c,n+1}} = \delta = 4.669 \dots \quad (8.18)$$

Nach deren Entdecker wird eine Periodenverdoppelungskaskade auch Feigenbaum-Kaskade genannt. Die universelle Konstante $\delta = 4.669 \dots$ wird als Feigenbaum-Delta bezeichnet.

Torusbifurkation

Bei einer Torusbifurkation handelt es sich um eine zweite Hopfbifurkation eines Grenzzyklus. Es entsteht eine doppelperiodische Bewegung auf einem Torus [SCH87, SCH00]. Das System hat nun zwei fundamentale Frequenzen. Haben diese ein rationales Verhältnis zueinander ist die Trajektorie des Systems geschlossen. Ist ihr Verhältnis irrational, auch inkommensurabel genannt, schließt sich die Trajektorie nicht und füllt die gesamte Oberfläche des Torus aus. Ein solches Verhalten wird quasiperiodisch genannt. Da das Frequenzspektrum einer quasiperiodischen Bewegung eine Vielzahl einzelner Frequenzspitzen enthält, kann es schwer sein, es von dem Frequenzspektrum einer chaotischen Bewegung zu unterscheiden. Durch eine Kaskade von Hopfbifurkationen können nun weitere fundamentale Frequenzen hinzukommen. Die Trajektorie bewegt sich dann auf einem „höherdimensionalen Torus“ und kann, wenn die Anzahl der Frequenzen und damit die Dimension des Torus gegen unendlich strebt, in Chaos übergehen. Das ist der sogenannte Landau-Weg in das Chaos [SCH89c]. Das System kann aber auch direkt nach der Torusbifurkation chaotisch werden. Dieser Weg wird Ruelle-Takens-Newhouse-Weg in das Chaos genannt [SCH89c].

Bifurkationen in dem betrachteten Modell

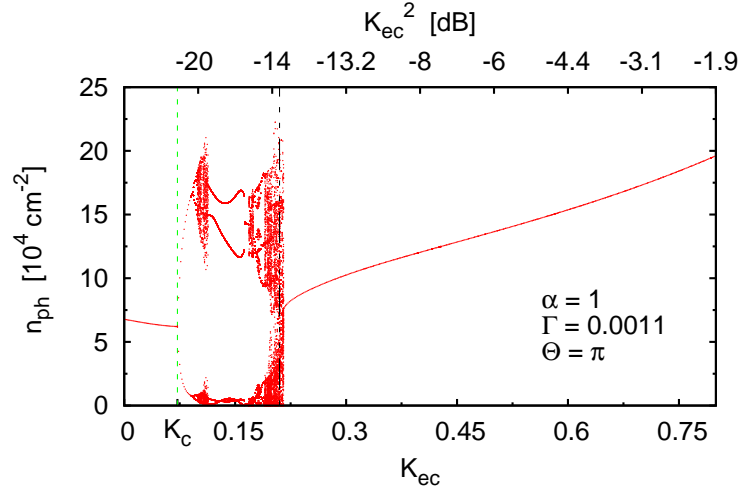
Die zu der Bestimmung der Fixpunkte verwendeten Lösungen sind von der Form rotierender Wellen (8.1). Bei den stabilen, stationären Bereichen in dem Bifurkationsdiagramm Abb. 8.4(a) handelt es sich bereits um stabile periodische Orbits in der Phase der Wellen. Die Hopfbifurkation bei K_c ist also eigentlich eine Hopfbifurkation eines periodischen Orbits bei der ein Torus entsteht. Sie wird in der Literatur auch als Torus- oder Neimark-Sacker-Bifurkation bezeichnet [KUZ95]. Wir wollen uns hier aber dem Sprachgebrauch von [FIE08] anpassen und sie einfach als Hopfbifurkation einer rotierenden Welle bezeichnen. Aufgrund der zeitverzögerten Rückkopplung hat die Linearisierung des hier betrachteten Gleichungssystems (6.11) unendlich viele Eigenwerte [KAN05]. Das Zentrumsmannigfaltigkeitstheorem [KUZ95] besagt jedoch, dass für die lokale Dynamik des Systems in der Nähe einer Bifurkation nur die Eigenwerte der Linearisierung λ_i entscheidend sind, die an dem Bifurkationspunkt kritisch sind, das heißt für die $\Re(\lambda_i) = 0$ gilt. Dadurch wird die effektive Dimension des Systems in der Nähe der Bifurkation verringert.

8.2.2. Bifurkationen für $\alpha = 1$, $\Gamma = 0.0011$

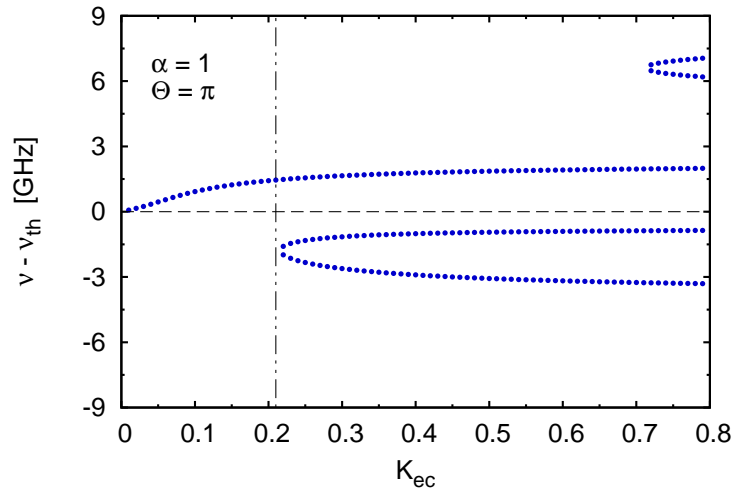
In diesem Abschnitt wird das Bifurkationsszenario für den stark gedämpften Fall ($\Gamma = 0.0011$) mit kleiner Phasen-Amplitudenkopplung ($\alpha = 1$) behandelt. In Abb. 8.4(a) sind die lokalen Extrema der Photonendichte n_{ph} über K_{ec} aufgetragen. Der untersuchte Bereich der Rückkopplungsstärken von $K_{ec} = 0$ bis $K_{ec} = 0.8$ ist deutlich größer als der Gültigkeitsbereich des LK-Modells. Dieses ist für Rückkopplungsstärken bis ungefähr $K_{ec} \approx 0.3$ gültig [TAG93] (siehe auch Abschnitt 4.2). Das Bifurkationsdiagramm Abb. 8.4(a) entsteht, indem für jeden K_{ec} -Wert eine Zeitserie der Photonendichte betrachtet wird. Die lokalen Extrema der Photonendichte werden dann über dem K_{ec} -Wert aufgetragen. Um transientes Verhalten weitgehend auszuschließen wird ein Zeitfenster zwischen 650 ns und 750 ns betrachtet. Zum Vergleich klingen die Relaxationsoszillationen ohne Rückkopplung auch in dem oszillatorischen Fall $\Gamma = 0.0015$ innerhalb der ersten drei Nanosekunden ab (siehe Abb. 7.6). Daher ergibt sich für K_{ec} -Bereiche, in denen die Photonendichte nach dem Abklingen der Relaxationsoszillationen einen stabilen, stationären Zustand erreicht, nur ein Wert pro Rückkopplungsstärke. Für die Simulationen werden neben den explizit in den Bildunterschriften angegebenen die Parameter aus Tabelle 5.1 verwendet. Zuerst wird ein Überblick über das Bifurkationsszenario gegeben, um dann anhand der Ausschnittsvergrößerung Abb. 8.5 genauer auf dessen einzelne Abschnitte einzugehen. Bei kleinen Rückkopplungsstärken beginnend bleibt die Photonendichte zuerst in einem stabilen, stationären Zustand, der sich mit zunehmender Rückkopplungsstärke leicht hin zu geringeren Photonendichten verschiebt. Dies liegt an der destruktiven Interferenz des Lichts, das gegenphasig ($\Theta = \pi$) aus der externen Kavität wieder in den Laser eingekoppelt wird mit dem Licht in der Laserdiode.

Bei einer kritischen Rückkopplungsstärke von $K_c = 0.08$ wird in einer superkritischen Hopfbifurkation ein stabiler periodischer Orbit geboren, der bis $K_{c,1} = 0.092$ stabil bleibt. Dort beginnt eine Kaskade von Periodenverdoppelungsbifurkationen des periodischen Orbits, die in einem chaotischen seltsamen Attraktor bei etwa $K_{c,\infty} \approx 0.099$ übergeht. Nach mehreren Wechseln zwischen chaotischen Bereichen und periodischen Fenstern reduziert bei $K_{ec} \approx 0.21623$ der Attraktor sein Phasenraumvolumen drastisch und die Photonendichte geht wieder in einen stabilen, stationären Zustand über. Mit zunehmender Rückkopplungsstärke verschiebt sich dieser hin zu höheren Photonendichten, bleibt aber bis an das Ende des betrachteten Rückkopplungsbereichs stationär.

In Abb. 8.5 ist eine Ausschnittsvergrößerung des Bifurkationsdiagramms Abb. 8.4(a) dargestellt. Dabei ist die kritische Rückkopplungsstärke K_c , bei der die erste Hopfbifurkation auftritt, durch eine grün gestrichelte Linie markiert. Die blauen, strichpunktierten Linien markieren Rückkopplungsstärken für die Zeitserien, Spektren und Phasenraumprojektionen im Folgenden analysiert werden. In Abb. 8.6 sind die Zeitserie und das Spektrum der Photonendichte für den Fall ohne Rückkopplung mit dem schwacher Rückkopplung $K_{ec} = 0.069 < K_c$ verglichen. Die Relaxationsoszillationen mit endlicher Rückkopplung (rot) sind wesentlich schwächer gedämpft als die der solitären Laserdiode (blau). Die Frequenzen beider Oszillationen sind jedoch fast identisch ($\nu(K_{ec} = 0) = 2.1$ GHz versus $\nu(K_{ec} = 0.069) = 2.3$ GHz). Die mit zunehmender Rückkopplung abnehmende Dämpfung deutet darauf hin, dass sich das System einer Hopfbifurkation nähert. In der superkritischen Hopfbifurkation für $K_c = 0.072$ wird



(a)



(b)

Abbildung 8.4.: (a): Bifurkationen der Photonendichte in Abhängigkeit von der Rückkopplungsstärke K_{ec} bzw. von K_{ec}^2 gemessen in dB . Die grüne, gestrichelte Linie markiert die kritische Rückkopplungsstärke $K_c = 0.072$, bei der die erste superkritische Hopfbifurkation auftritt. Die schwarze, strichpunktierte Linie markiert die Rückkopplungsstärke, an der ein neues Moden-Antimoden-Paar von externen Resonatormoden mit negativer Frequenzverschiebung gegenüber der Frequenz des solitären Lasers entsteht. Die maximale Stromdichte beträgt das 2.5-fache der Schwellstromdichte für die Laserdiode ohne Rückkopplung $j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 3708 \text{ Acm}^{-2}$. Parameterwerte: $l = 25 \text{ mm}$, $\alpha = 1$, $\Gamma = 0.0011$ und $\theta = \pi$; sonstige Parameter wie in Tabelle 5.1. (b): Mögliche Frequenzverschiebung in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke K_{ec} für $\alpha = 1$ bei gegenphasiger Wiedereinkopplung ($\Theta = \pi$) des Lichts. Dargestellt sind approximative Lösungen der transzendenten Gleichung (8.5) für $l = 25 \text{ mm}$.

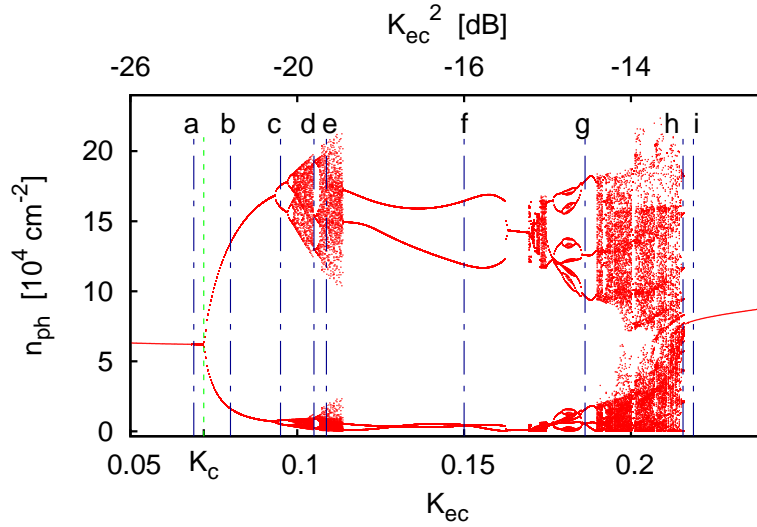


Abbildung 8.5.: Ausschnittsvergrößerung des Bifurkationsdiagrammes der Photonendichte über K_{ec} im Bereich von $K_{ec} = 0$ bis $K_{ec} = 0.25$. Blaue strich-punktuierte Linien **a** bis **i** markieren Rückkopplungsstärken, für die Zeitserien, Spektraldichten und Phasenraumprojektionen diskutiert werden. Die grüne gestrichelte Linie markiert die Hopfbifurkation mit der geringsten Rückkopplungsstärke. Parameterwerte wie in Abb. 8.4(a).

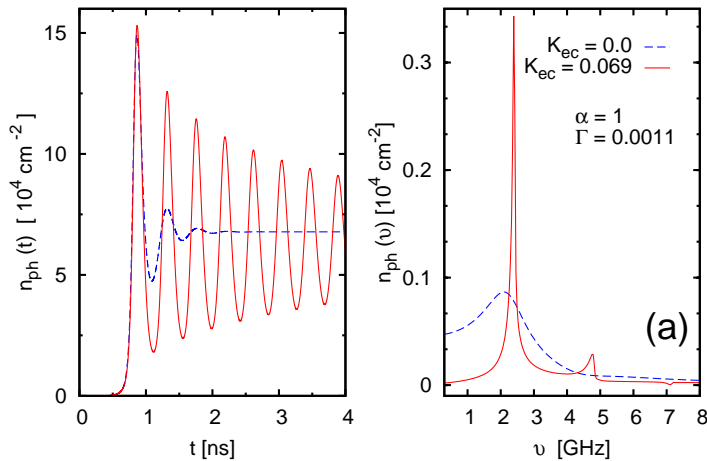


Abbildung 8.6.: Vergleich der Zeitserien und Spektraldichten ohne Rückkopplung ($K_{ec} = 0$) und mit schwacher Rückkopplung ($K_{ec} = 0.069$, $K_{ec} < K_c$), (Linie **a** in Abb. 8.5) in dem stark gedämpften Fall ($\alpha = 1$, $\Gamma = 0.0011$). Andere Parameterwerte wie in Abb. 8.4(a).

ein Grenzzzyklus erzeugt, der bis zu der ersten Bifurkation der Periodenverdoppelungskaskade bei $K_{c,1} = 0.092$ stabil bleibt.

Die Zeitserie für $K_{ec} = 0.08$ in Abb. 8.7(b) zeigt daher eine sich selbst erhaltene Schwingung mit konstanter Amplitude. Die fundamentale Frequenz des Spektrums liegt mit $\nu(K_{ec} = 0.08) = 2.3$ GHz genau auf der Frequenz der Relaxationsoszillationen kurz vor der Hopfbifurkation (siehe Abb. 8.6). Desweiteren zeigen sich höhere Harmonische dieser Grundfrequenz. In Abb. 8.8(b) sind Projektionen der Trajektorie auf die (n_e, n_{ph}) -Ebene und die (n_h, n_{ph}) -Ebene dargestellt. Diese ergeben Grenzzyklen. Dabei zeigt die Trajektorie in der Projektion auf die (n_e, n_{ph}) -Ebene eine für den stark gedämpften Fall typische Rotation im Uhrzeigersinn. Die Projektion der Trajektorie in der (n_h, n_{ph}) -Ebene rotiert hingegen entgegen des Uhrzeigersinns (siehe dazu auch Kapitel 7.3). Das nahezu wurzelförmige Anwachsen der Maxima der Photonendichte in dem Bifurkationsdiagramm Abb. 8.5 für Rückkopplungsstärken wenig größer als die kritische Rückkopplungsstärke K_c ist ein deutlich Hinweis dafür, dass bei K_c eine Hopfbifurkation stattgefunden hat [KUZ95].

Bei $K_{c,1} = 0.92$ beginnt eine Periodenverdoppelungskaskade, die für $K_{c,\infty} = 0.099$ in einem chaotischen Attraktor mündet. Deutlich unterscheidbar sind drei aufeinanderfolgende Periodenverdoppelungsbifurkationen. Der Abstand bezüglich ihrer Bifurkationspunkte nimmt in Übereinstimmung mit der theoretischen Folge $K_{c,1}, K_{c,2}, K_{c,3} \dots$ der $K_{c,i}$ -Werte (8.18) ab. Der aus den ersten drei Bifurkationen der Kaskade berechnete Wert für die Feigenbaumkonstante $\delta_{\text{ber}} \approx 7.5$ stimmt nicht mit dem theoretischen Grenzwert der Folge $\delta = 4.669 \dots$ (8.18) überein, da dieser nur asymptotisch für $k \rightarrow \infty$ gilt.

In Abb. 8.7(c) sind Zeitserie und Spektrum für $K_{ec} = 0.095$ dargestellt. Der Zeitserienausschnitt zeigt nun Oszillationen der Periode zwei. Es sind zwei Schwingungen mit geringfügig unterschiedlichen Amplituden zu erkennen. Das Frequenzspektrum zeigt neben der Frequenz der Relaxationsoszillationen $\nu_{RO} = 2.3$ GHz nun einen kleineren Peak bei $\frac{1}{2}\nu_{RO}$. Das System befindet sich nun auf einem Grenzzzyklus mit der doppelten Periode des ursprünglichen Zyklus. Dies zeigen auch die Projektionen der Trajektorie auf die (n_e, n_{ph}) - und die (n_h, n_{ph}) -Ebene in Abb. 8.8(c). Das ist ein Beleg dafür, dass eine Periodenverdoppelungsbifurkation stattgefunden hat. Desweiteren zeigt das Spektrum, wie es bei einer nichtlinearen Oszillation zu erwarten ist, Nebenmaxima bei den höheren Harmonischen der Hauptfrequenz ν_{RO} , sowie bei Summen und Differenzen der Hauptfrequenz oder ihrer Harmonischen mit der Frequenz $\frac{1}{2}\nu_{RO}$. Das Signal der Frequenz $\frac{1}{2}\nu_{RO}$ ist zu schwach, als das man seine höheren Harmonischen erkennen könnte.

Abb. 8.7(d) zeigt Zeitserie und Spektrum für ein schmales Fenster der Periode drei für eine Rückkopplungsstärke von $K_{ec} = 0.105$. Das Spektrum weist neben dem unveränderten Hauptmaximum bei $\nu_{RO}(K_{ec} = 0.105) = 2.3$ GHz, Nebenmaxima bei $\frac{1}{3}\nu_{RO}$ und $\frac{2}{3}\nu_{RO}$, sowie höhere Harmonische, Summen und Differenzen der Grundfrequenzen auf. Die zugehörigen Phasenraumprojektionen sind in Abb. 8.8(d) dargestellt. Sie zeigen dreifach gewickelte Orbits. Für steigende K_{ec} -Werte geht das System wieder in einen chaotischen Zustand über. Welchen Weg in das Chaos das System diesmal „wählt“, muss noch genauer ergründet werden.

Abb. 8.7(e) zeigt eine Zeitserie und Spektrum für eine Rückkopplungsstärke $K_{ec} = 0.10875$ innerhalb des chaotischen Bandes. Ein Indiz dafür, dass das System chaotisch ist, sind die variierenden Amplituden der Schwingungen. Das Frequenzspektrum zeigt

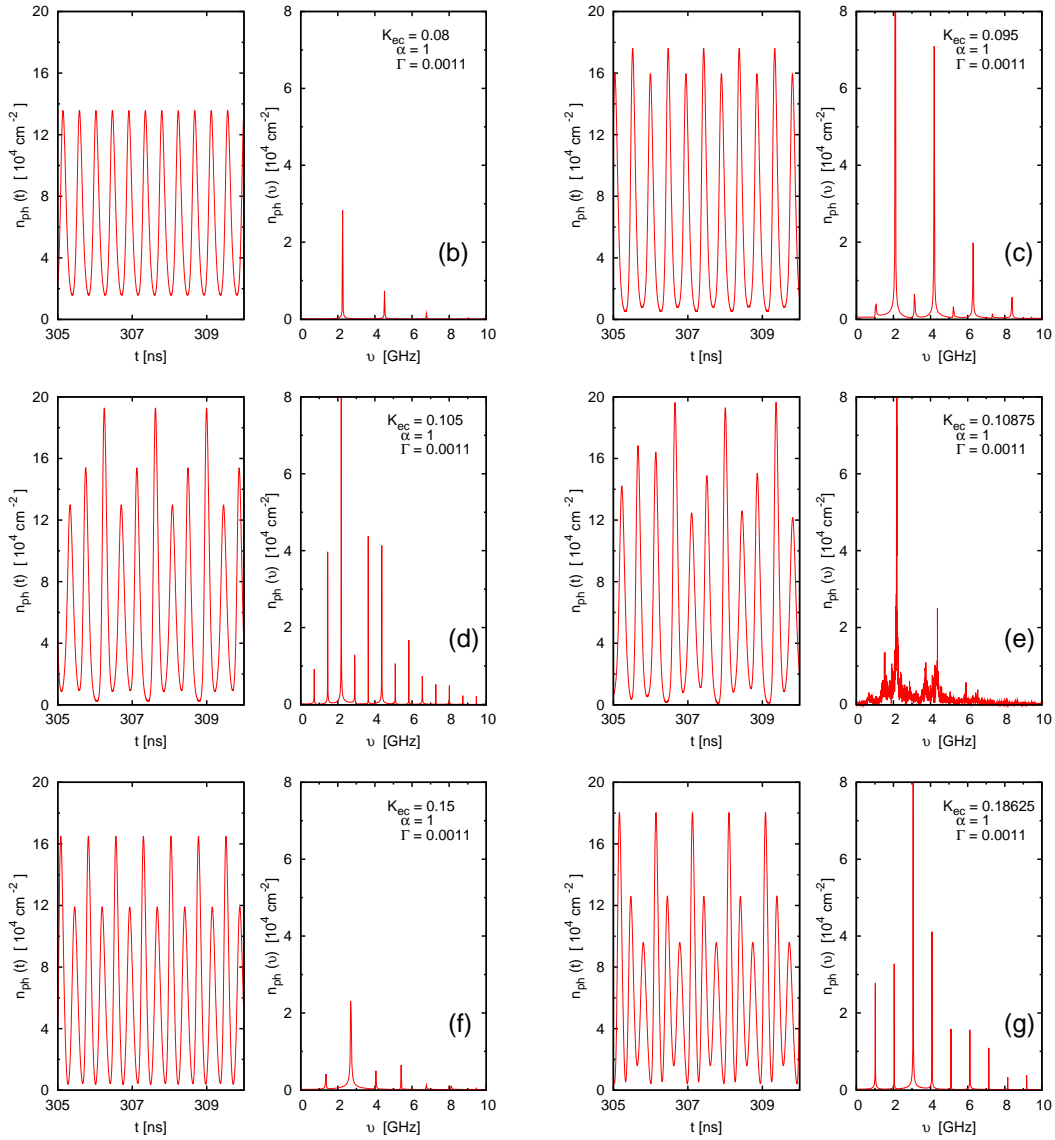


Abbildung 8.7.: Zeitserienausschnitte und zugehörige Spektraldichten in dem stark gedämpften Regime ($\Gamma = 0.0011, \alpha = 1$) für ausgewählte Rückkopplungsstärken (blaue, strich-punktierte Linien (b)-(g) in Abb. 8.6), für verschiedene Stadien der Bifurkationskaskade. Die anderen Parameterwerte sind wie in Abb. 8.4(a).

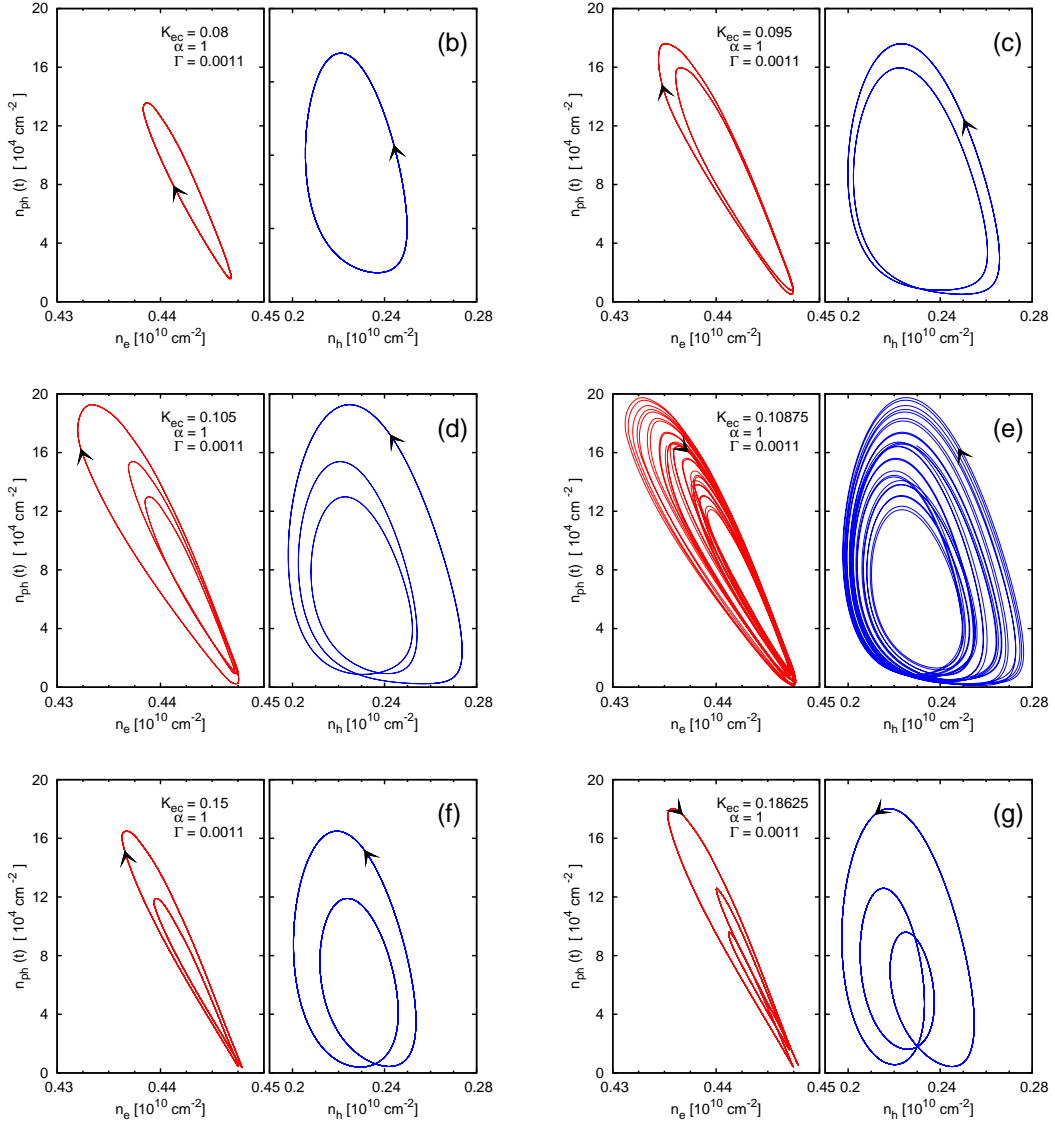


Abbildung 8.8.: Projektionen auf die (n_e, n_{ph}) - und die (n_h, n_{ph}) -Ebene des Phasenraumes in dem stark gedämpften Regime ($\Gamma = 0.0011$, $\alpha = 1$) für verschiedene Rückkopplungsstärken (blaue, strich-punktierte Linien (b)-(g) in Abb. 8.5). Pfeile markieren die Rotationsrichtung der Trajektorie in der jeweiligen Projektion. Die anderen Parameterwerte sind wie in Abb. 8.4(a).

nur noch wenige diskrete Maxima. Deutlich aufgelöst sind nur noch die Frequenz der Relaxationsoszillation $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.10875) = 2.3 \text{ GHz}$ und deren erste Harmonische. Das breite Frequenzspektrum weist ebenfalls auf eine chaotische Bewegung hin. Die Phasenraumprojektionen Abb. 8.8(e) zeigen eine Vielzahl periodischer Orbits innerhalb des chaotischen Attraktors. Daher nimmt dieser in den betrachteten Projektionen ein deutlich größeres Phasenraumvolumen als die vorher betrachteten Attraktoren (Fixpunkte und periodischen Orbits) ein.

Bei $K_{ec} = 0.113$ beginnt ein großes Fenster der Periode zwei, das sich bis $K_{ec} = 0.163$ fortsetzt. Dort geht es in einen einfach gewickelten periodischen Orbit über. Diesem schließt sich bei $K_{ec} = 0.168$ ein weiterer chaotischer Bereich an. Nach weiteren Fenstern unterschiedlicher Periodizität wird das System bei $K_{ec} = 0.19$ wieder chaotisch.

In Abbildung Abb. 8.7(f) und Abb. 8.7(g) sind Zeitserie und Spektrum eines Fensters der Periode zwei für $K_{ec} = 0.15$ und eines Fensters der Periode drei für $K_{ec} = 0.18625$ dargestellt. Die zugehörigen Projektionen der Trajektorie im Phasenraum finden sich in Abb. 8.8(f) und in Abb. 8.8(g). Zu Beginn des Fensters der Periode zwei beginnt sich die Frequenz der Relaxationsoszillationen hin zu höheren Frequenzen zu verschieben. So beträgt sie für $K_{ec} = 0.15$ $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.15) = 2.7 \text{ GHz}$ während sie für $K_{ec} = 0.18625$ bereits $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.18625) = 3.0 \text{ GHz}$ beträgt.

Reguläre Pulspakete

Ein interessantes Phänomen zeigt sich für Rückkopplungsstärken knapp unterhalb von $K_{ec} = 0.21623$, bei der das System in einen stabilen, stationären Zustand übergeht. Aus den chaotischen Zeitserien für $K_{ec} = 0.19$ bis $K_{ec} = 0.21$ bilden sich mit zunehmender Rückkopplungsstärke einzelne Pulspakete heraus, deren Einhüllende immer regulärer wird. Welche Art von Bifurkation dafür verantwortlich ist, muss noch ergründet werden. Intermittenz kann jedoch aufgrund des Skalenverhaltens der Frequenz der Einhüllenden der Pulspakete ν_{RPP} ausgeschlossen werden. Abb. 8.9 zeigt einen Ausschnitt der Zeitserie und das Frequenzspektrum für $K_{ec} = 0.215625$ (Mit **h** markierte blaue Linie in Abb. 8.5) mit nahezu vollständig regulären Pulspaketen. Im Folgenden wird ein einzelnes dieser Pulspakete genauer betrachtet. Der Beginn eines jeden Paketes ist durch ein starkes Ansteigen der Photonendichte, gefolgt von gedämpften Relaxationsoszillationen, gekennzeichnet. Dabei sinkt im Minimum der ersten Schwingung die Photonendichte bis auf Null ab. Wenn die Oszillationen fast abgeklungen sind, beginnt die Photonendichte bis auf etwa ein Viertel des Wertes des angrenzenden stabilen, stationären Zustands $n_{ph,s}(K_{ec} = 0.21623) = 7.8 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$ abzusinken. Das Spektrum zeigt eine Vielzahl von diskreten Frequenzen. Die niedrigste Frequenz im Spektrum $\nu_{\text{RPP}}(K_{ec} = 0.215625) = 0.3 \text{ GHz}$ ist die Wiederholungsfrequenz der Pulspakete. Der zweithöchste Peak gehört zu der Frequenz der Relaxationsoszillationen $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.215625) = 3.7 \text{ GHz}$. Der höchste Peak im Spektrum ist der Differenz dieser beiden Grundfrequenzen der Oszillation $\nu_{\text{RO}} - \nu_{\text{RPP}} = 3.4 \text{ GHz}$ zuzuordnen. Das Spektrum zeigt weitere Peaks, die untereinander Frequenzabstände von 0.3 GHz haben. Dies sind Summen und Differenzen höherer Harmonischer von ν_{RPP} mit ν_{RO} . In Abb. 8.10 sind die zugehörigen Phasenraumprojektionen der Trajektorie dargestellt. Die Trajektorie wird im Gegensatz zu den Projektionen in Abb. 8.8 auf die (n_{ph}, n_e) -Ebene und die (n_{ph}, n_h) -Ebene projiziert, um sie besser mit den in [HEI03a] veröffentlichten Ergebnissen vergleichen zu können. Sowohl die Achsen als

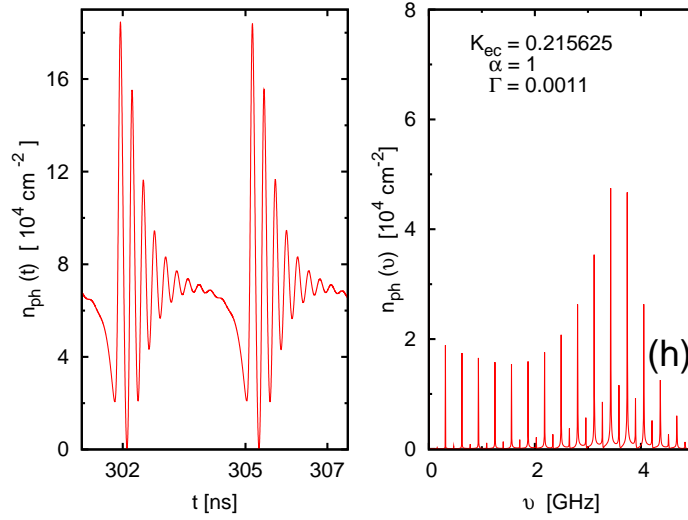


Abbildung 8.9.: Gleichmäßige Pulsation der Photonendichte (links) und dazugehörige Spektraldichte (rechts) für $K_{ec} = 0.215625$ (blaue, strichpunktierte Linie **h** in Abb. 8.5). Die anderen Parameterwerte sind wie in Abb. 8.4(a).

auch die Rotationsrichtung der Trajektorien sind damit gegenüber den vorher diskutierten Phasenraumprojektionen (Abb. 8.8) vertauscht. Es ist nur die Projektion des Teils der Trajektorie dargestellt, der zu einem einzelnen Pulspaket gehört. Da die Bewegung in der Projektion auf die (n_{ph}, n_h) -Ebene einfacher nachzuverfolgen ist als in der Projektion auf die (n_{ph}, n_e) -Ebene, wird das Verhalten des Systems anhand ersterer geschildert. Ausgehend von einem Maximalwert der Löcherdichte bei $K_{ec} = 0.255$ bewegt sich das System in Spiralbahnen auf einen Sattel-Fokus zu, der in der (n_{ph}, n_h) -Ebene liegt.

Die spiralförmige Trajektorie bedeutet ein Wechselspiel zwischen der Ladungsträgerinversion und der Photonendichte. Die Elektronendichte n_e variiert während des gesamten Zyklus deutlich weniger als die Löcherdichte n_h .

Daher bedeutet eine Abnahme der Löcherdichte eine Verringerung der Ladungsträgerinversion $n(t) = n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}$ und somit eine Verringerung der optischen Verstärkung (vergleiche Gleichung (6.8))

$$G_{opt}(n(t)) = \Gamma G(n(t)) = \frac{\Gamma W A}{2} (n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}). \quad (8.19)$$

Dies führt zu einer Abnahme der Photonendichte, während die Löcherdichte aufgrund der nun im Vergleich zu der Einstreuung kleinen Verluste durch die induzierte Emission $R_{ind} = W A (n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}) n_{ph}$ wieder ansteigt. Durch die sich aufbauende Inversion verstärkt sich der optische Gewinn, die Photonendichte steigt an und der Kreislauf schließt sich. Es handelt sich hierbei um die gedämpften Relaxationsoszillationen, die in der Zeitserie innerhalb eines Pulspaketes sichtbar werden. Kurz vor dem Erreichen des Fixpunktes gelangt die Trajektorie entlang der instabilen Mannigfaltigkeit des Sattel-Fokus wieder in den Bereich höherer Löcherdichten. Diese Zunahme der Löcherdichte führt zu dem Abfall der Photonendichte gegen Ende des betrachteten

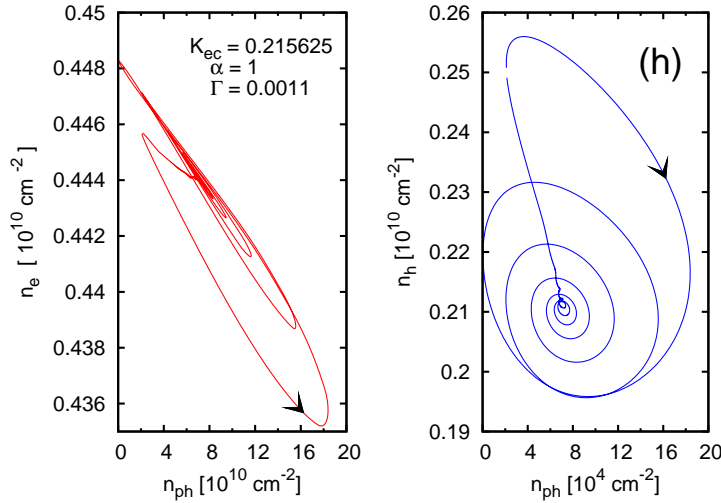


Abbildung 8.10.: Projektionen auf die (n_e, n_{ph}) - und (n_h, n_{ph}) -Ebene des Phasenraumes für $\Gamma = 0.0011$, $\alpha = 1$. Die Rückkopplungsstärke beträgt $K_{ec} = 0.215625$ (blaue, strich-punktierte Linie **h** in Abb. 8.5). Die anderen Parameter sind wie in Abb. 8.4(a).

Pulspaketes. Zur Veranschaulichung des vermutlich zugrunde liegenden Prozesses ist in Abb. 8.11 ein homokliner Orbit H eines Sattel-Fokus in einem dreidimensionalen Phasenraum dargestellt. Die lokale stabile Mannigfaltigkeit ist mit W_{loc}^s und die lokale instabile Mannigfaltigkeit mit W_{loc}^u bezeichnet.

Die Trajektorie ist nicht geschlossen, jedoch liegen Start- und Endpunkt sehr dicht beieinander. Das nächste Pulspaket beginnt also mit sehr ähnlichen Anfangsbedingungen. Da das System nicht mehr chaotisch ist, entwickelt sich das Pulspaket sehr ähnlich zu dem vorherigen. So kommt die hohe Regularität der Einhüllenden dieser Pakete zu Stande.

In Abb. 8.12 ist ein Teil der Ergebnisse von Heil et al. aus [HEI03a] zusammengestellt. In der Arbeit werden zum einen Messungen an einem Quantengrabenlaser mit kurzer externer Kavität präsentiert und zum anderen werden diese mit einem LK-Modell beschrieben [HEI03a, HEI01a]. In dem Experiment wurden für bestimmte Rückkopplungsstärken und Phasen des rückgekoppelten Lichts gleichmäßige Pulspakete gefunden. Abb. 8.12I(a) zeigt eine experimentell gemessene Zeitserie der Laserintensität, Abb. 8.12I(b) eine theoretisch berechnete. Das Modell kann in diesem Fall die experimentellen Ergebnisse gut beschreiben, auch wenn im Gegensatz zu dem Experiment die Photonendichte bei den Minima der Schwingungen auf Null abfällt. Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen den in dieser Arbeit gefundenen Pulspaketen und den von Heil et al. beobachteten ist, dass bei ihnen die Frequenz der gedämpften Schwingungen die Resonanzfrequenz der externen Kavität $\nu_{ec} = c/2l$ und nicht wie in diesem Modell die Frequenz der Relaxationsoszillationen ist.

In Abb. 8.12I(c) ist die Projektion der Trajektorie eines Pulspaketes auf die durch den Betrag der Feldamplitude und der Ladungsträgerinversion aufgespannte Ebene gezeigt. Diese zeigt große Ähnlichkeit zu der entsprechenden Projektion in unserem Modell (siehe Abb. 8.10). Gemeinsamkeiten sind die fast geschlossene Trajektorie, so-

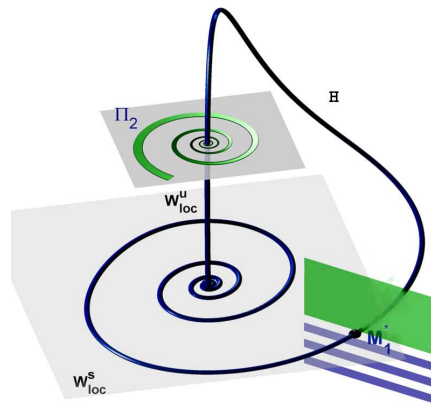
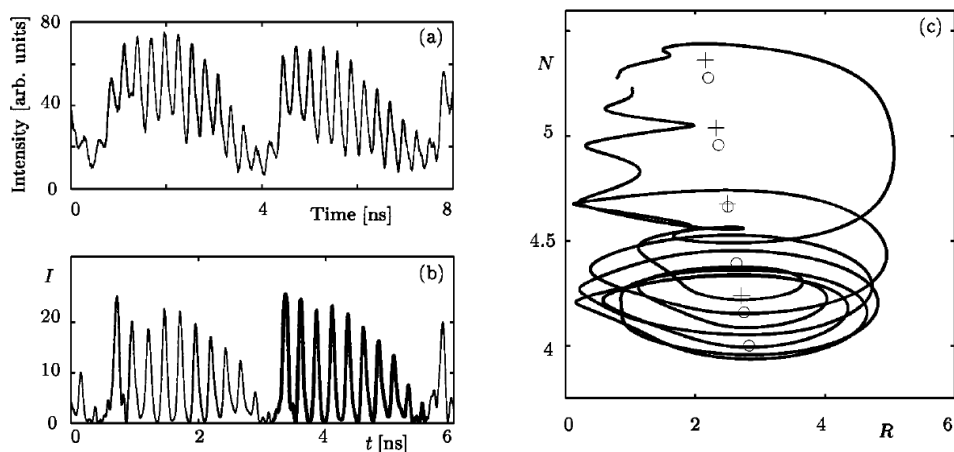


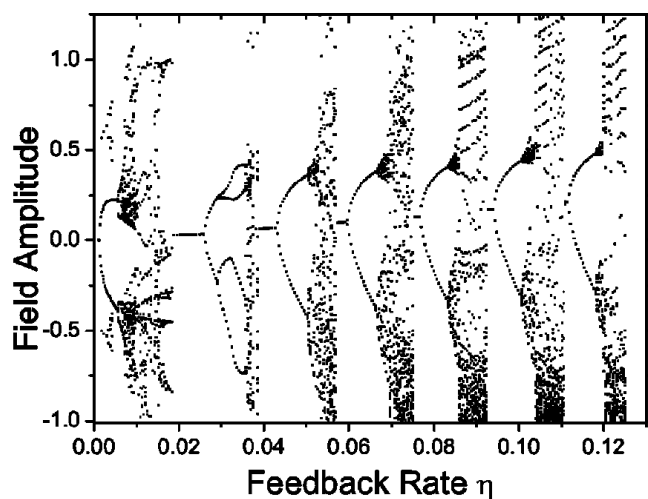
Abbildung 8.11.: Homokliner Orbit H eines Sattel-Fokus in drei Raumdimensionen. W_{loc}^s bezeichnet die lokale stabile Mannigfaltigkeit. Auf dieser nähert sich der homokline Orbit in Vorwärtszeit spiralförmig dem Fixpunkt an. W_{loc}^u bezeichnet die instabile Mannigfaltigkeit, in der sich der Orbit in Rückwärtszeit dem Fixpunkt annähert.

wie die Reinjektion in eine Region geringer Ladungsträgerinversion und damit geringer optischer Verstärkung zu Beginn des Pulspaketes, die zu dem oben beschriebenen oszillatorischen Verhalten führt. Die Trajektorie spiralt sich bei Heil et al. jedoch nicht so eng auf bevor sie wieder in die Region höherer Ladungsträgerinversion gelangt, wie in den hier beobachteten Szenarien. In Kapitel 7.3 haben wir die Erkenntnis gewonnen, dass sich in dem stark gedämpften Fall, in dem unser Modell einen Quantenpunktlaser beschreibt, die Dynamik der Löcher in den Quantenpunkten qualitativ mit der Dynamik der Ladungsträgerinversion in einem Quantengrabenlaser übereinstimmt. Die Ähnlichkeit der Abbildungen Abb. 8.10 und Abb. 8.12I(c) zeigt, dass dies auch mit Rückkopplung gültig bleibt.

Ein von Heil et al. errechnetes Bifurkationsdiagramm ist in Abb. 8.12II wiedergegeben. Es ist der Betrag der Feldamplitude in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke aufgetragen. Es zeigt für den betrachteten Bereich der Rückkopplungsstärke sieben voneinander unterscheidbare Bifurkationskaskaden. Auch wenn Abb. 8.12II nicht direkt mit Abb. 8.3 verglichen werden kann, so lässt doch die höhere Anzahl von Bifurkationskaskaden darauf schließen, dass der Quantengrabenlaser sensibler auf Rückkopplung reagiert. (Die beiden Abbildungen lassen sich nicht direkt vergleichen, da andere Kavitätswängen und somit andere effektive Rückkopplungsstärken verwendet wurden.) Bei Heil et al. entstehen die ersten vier Kaskaden durch Periodenverdopplung, so wie auch die in unserem Modell gefundene Kaskade durch Periodenverdopplung entsteht. Die regulären Pulspakete entwickeln sich bei ihnen jedoch aus einer anderen Kaskade von Bifurkationen: Eine Hopfbifurkation einer rotierenden Welle wird gefolgt von einer Torusbifurkation, die zu quasiperiodischem Verhalten führt. Aus diesem entwickeln sich bei steigender Rückkopplungsstärke dann die regulären Pulspakete. Eine offene Frage ist noch, wie das in dieser Arbeit betrachtete System von den gleichmäßigen Pulsationen der Photonendiche in einen stabilen, stationären Zustand übergeht. Eine Möglichkeit ist der Weg über eine homokline Bifurkation. So könnte der positive, der instabilen Mannigfaltigkeit zugeordnete Eigenwert negativ werden und der



I



II

Abbildung 8.12.: Abbildungen reproduziert aus [HEI03a]. Abb. 8.12I: Experimentelle (a) und simulierte (b) Zeitserie der Intensität für den Rückkopplungsbereich, in dem reguläre Pulspakete auftreten. Die Trajektorie des in Abbildung (b) dick eingezeichneten Pulspaketes ist in (c) auf die (R,N) -Ebene projiziert. Dabei ist R die Amplitude des elektrischen Feldes und N die Ladungsträgerinversion. Kreise und Kreuze bezeichnen die Lage von Knotenpunkten und Sätteln von Lösungen in Form externer Resonatormoden. Abb. 8.12II: Bifurkationsdiagramm der Feldamplitude R über der Rückkopplungsrate η

Sattel-Fokus in einen Fokus übergehen (vergleiche Abb. 8.11).

Abschließend sind in Abb. 8.13 noch die Zeitserie und das Spektrum der Relaxationsoszillationen ohne Rückkopplung ($K_{ec} = 0$) und für einen stabilen, stationären Zustand nach der Bifurkationskaskade $K_{ec} = 0.21875$ gezeigt. Die Frequenz der Relaxationsoszillationen mit Rückkopplung $\nu_{RO}(K_{ec} = 0.21875) = 3.8 \text{ GHz}$ ist fast doppelt so hoch wie die Frequenz der Relaxationsoszillationen ohne Rückkopplung ($\nu_{RO}(K_{ec} = 0) = 2.1 \text{ GHz}$). Desweiteren sind die Relaxationsoszillationen für $K_{ec} = 0.21875$ schwächer

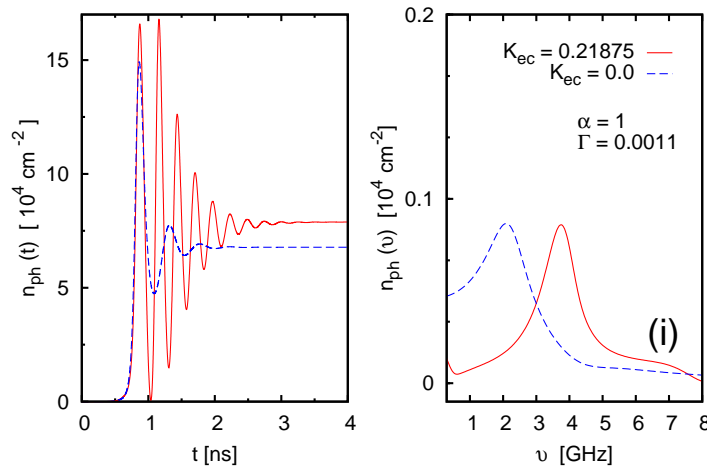


Abbildung 8.13.: Zeitserien und Spektraldichten für stabile Laserkonfigurationen ohne ($K_{ec} = 0$) und mit Rückkopplung ($K_{ec} = 0.21875$). Die anderen Parameterwerte sind wie in Abb. 8.4(a).

gedämpft als die der solitären Laserdiode. Letzteres liegt wahrscheinlich an der Ruine des chaotischen Attraktors, der für geringfügig kleinere Rückkopplungsstärken existiert. Die Ähnlichkeit der Relaxationsoszillationen des stabilen, stationären Zustandes für $K_{ec} = 0.21875$ mit den Oszillationen innerhalb eines Pulspaketes verdeutlicht, dass es sich bei letzteren um Relaxationsoszillationen handelt (vergleiche Abb. 8.13 und Abb. 8.10).

Bei einer Rückkopplungsstärke von $K_{ec} = 0.21$ wird in dem Bild externer Resonatormoden in einer Sattel-Knoten-Bifurkation ein neues Moden-Antimodenpaar geboren (siehe Abb. 8.4(b)). Dem System stehen damit für Rückkopplungsstärken $K_{ec} \geq 0.21$ neben der aus der solitären Lasermoden entstandenen externen Resonatormode nun zwei weitere zur Verfügung. Die Sattel-Lösung ist immer instabil, aber die Knoten-Lösung kann stabil sein. Die deutlich erhöhte Frequenz der Relaxationsoszillationen lässt vermuten, dass das System von der chaotisch gewordenen, aus der solitären Lasermode entstandenen, externen Resonatormode bei $K_{ec} \geq 0.21$ auf die neu hinzugekommene Knoten-Lösung hinüberwechselt. Derartige Szenarien werden in gewöhnlichen LK-Modellen beobachtet [HOH99]. Dabei wechselt das System auf die Mode mit der maximalen optischen Verstärkung. Um festzustellen, ob auch in dem hier betrachteten System ein Modenwechsel stattfindet, müssen durch Lösen des Gleichungssystems (8.5), (8.7a), (8.10), (8.11a) und (8.12) die Gleichgewichtsphotonendichten $n_{ph,s}$ für die möglichen Frequenzverschiebungen $\Delta\omega_s$ errechnet werden. Durch Vergleich mit dem

numerisch errechneten Bifurkationsdiagramm Abb. 8.4(a) kann dann herausgefunden werden, welche Mode in dem jeweiligen Bereich stabiler stationärer Laseremission aktiv ist. Die Auswirkungen von mit steigender Rückkopplung hinzukommender Fixpunkte auf die Dynamik des Systems muss noch genauer untersucht werden.

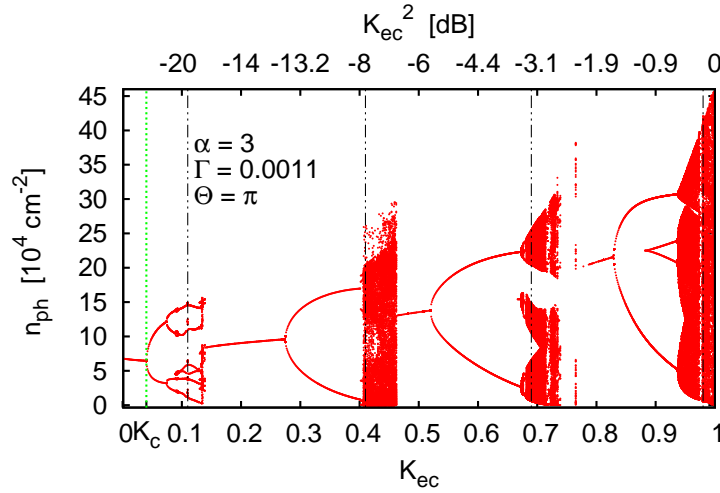
Heil et al. identifizierten die regulären Pulspakete als das Analogon in dem Regime kurzer Kavitäten zu Fluktuationen niedriger Frequenz (engl. *low frequency fluctuations* [SAN94, KAN05]), die bei Quantengrabenlasern mit längeren externen Kavitäten ($\nu_{ec} \gg \nu_{RO}$) auftreten. Diese zeichnen sich durch abruptes Absinken der Photonendichte aus. Dabei kollidiert in einer Krise der chaotische Attraktor mit einem Sattelpunkt [HOH99]. Auch dieses Szenario muss mit dem in dieser Arbeit verwendeten Modell genauer untersucht werden.

8.3. Einfluss des α -Faktors und des optischen Füllfaktors Γ auf die Laserdynamik

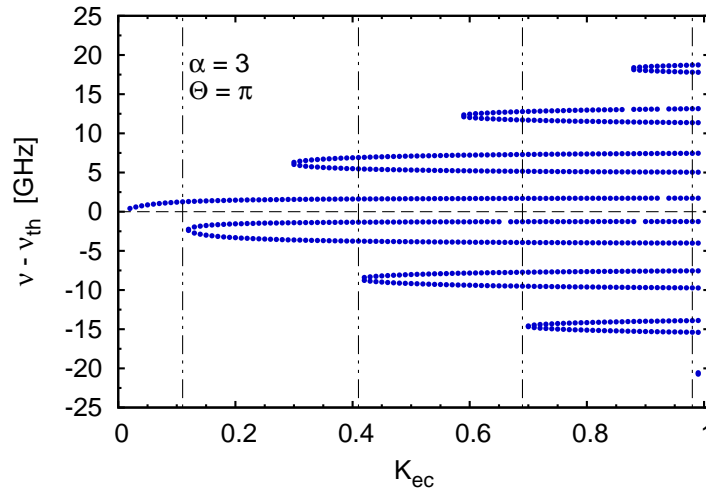
Bisher haben wir das Modell für einen kleinen α -Faktor von $\alpha = 1$ und einen kleinen optischen Füllfaktor $\Gamma = 0.0011$ betrachtet. Mit diesen Parameterwerten zeigt das Modell stark gedämpfte Relaxationsoszillationen und kann gut das dynamische Verhalten eines Quantenpunktlasers beschreiben [LUE08]. Quantengrabenlaser hingegen weisen eine größere Phasen-Amplitudenkopplung auf, was sich in größeren α -Faktoren ausdrückt. Typisch für GaAs/AlGaAs-Quantengrabenlaser sind Werte in dem Bereich von $\alpha = 2$ bis $\alpha = 5$ [OSI87]. Selbst kleine Rückkopplungsstärken bewirken Veränderungen der Phasendynamik, die sich durch die Kopplung auf die Amplitude auswirken. Dadurch wird die Emission der Laserdiode instabil. Die größere Stabilität von Quantenpunktlasern bei optischer Rückkopplung wird daher zum einen mit deren geringeren Phasen-Amplitudenkopplung begründet [CAR05]. Zum anderen werden die stärker gedämpften Relaxationsoszillationen von Quantenpunktlasern für deren kleinere Sensitivität gegenüber Rückkopplung verantwortlich gemacht [OBR03a, CAR06a]. In unserem Modell können sowohl die Phasen-Amplitudenkopplung (über den α -Faktor) als auch die Dämpfung der Relaxationsoszillationen (über den optischen Füllfaktor Γ) getrennt voneinander variiert werden. Die Auswirkungen beider Parameter werden in den folgenden beiden Abschnitten untersucht.

8.3.1. Abhängigkeit der Laserdynamik vom α -Faktor

In diesem Abschnitt wird die Veränderung des Bifurkationsdiagramms durch eine Erhöhung des α -Faktors von $\alpha = 1$ auf $\alpha = 3$ diskutiert. Der optische Füllfaktor ist wieder auf den stark gedämpfte Relaxationsoszillationen beschreibenden Wert $\Gamma = 0.0011$ gesetzt. Das zugehörige Bifurkationsdiagramm ist in Abb. 8.14(a) abgebildet. Es zeigt deutlich strukturelle Veränderungen gegenüber dem Bifurkationsdiagramm für $\alpha = 1$, das in Abb. 8.4(a) dargestellt ist. Die kritische Rückkopplungsstärke, bei der die erste Hopfbifurkation stattfindet, verschiebt sich hin zu einem kleineren Wert $K_c(\alpha = 3) = 0.04$ gegenüber $K_c(\alpha = 1) = 0.072$ für $\alpha = 1$. In dem in Abb. 8.4(a) betrachteten Bereich der Rückkopplungsstärke von $K_{ec} = 0$ bis $K_{ec} = 0.8$ sind nun drei Bifurkationskaskaden sichtbar, die von Bereichen stabiler Laseremission unterbrochen sind. Dadurch wird bestätigt, dass auch in unserem Modell die Laserdiode



(a)



(b)

Abbildung 8.14.: (a): Bifurkationsdiagramm der Photonendichte in Abhängigkeit von der Rückkopplungsstärke K_{ec} bzw. von K_{ec}^2 gemessen in dB. Die grüne, gestrichelte Linie markiert die Hopfbifurkation mit der niedrigsten Rückkopplungsstärke $K_c = 0.04$, schwarze, strich-punktierte Linien markieren Rückkopplungsstärken an denen neue Moden-Antimoden-Paare der externen Resonatormoden mit negativer Frequenzverschiebung gegenüber der Frequenz des solitären Lasers entstehen. Die maximale Stromdichte beträgt das 2.5-fache der Schwellstromdichte für die Laserdiode ohne Rückkopplung $j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 3708 \text{ Acm}^{-2}$. Parameterwerte: $l = 25 \text{ mm}$, $\alpha = 3$, $\Gamma = 0.0011$ und $\theta = \pi$; sonstige Parameter wie in Tabelle 5.1. (b): Mögliche Frequenzverschiebung in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke K_{ec} für $\alpha = 3$ bei gegenphasiger Wiedereinkopplung ($\Theta = \pi$) des Lichts. Dargestellt sind approximative Lösungen der transzendenten Gleichung (8.5) für $l = 25 \text{ mm}$.

mit zunehmender Phasen-Amplitudenkopplung sensibler auf optische Rückkopplung reagiert. Diese Beobachtung stimmt gut mit den Ergebnissen der bereits in der Einleitung dieses Kapitels erwähnten Studie von Carroll et al. [CAR06a] überein. Sie untersuchten die Temperaturabhängigkeit des Ausgangssignals eines Quantenpunktlasers unter dem Einfluss von Rückkopplung in einem Temperaturbereich zwischen 20°C bis 50°C . Mit steigender Temperatur wird der Laser bereits bei kleineren Rückkopplungsstärken instabil. Dies begründen sie durch einen mit der Temperatur deutlich ansteigenden α -Faktor, den sie ebenfalls gemessen haben.

Jede Bifurkationskaskade beginnt mit einer Hopfbifurkation einer rotierenden Welle. Dieser ersten Bifurkation schließen sich weitere an, die schließlich zu chaotischen Bereichen führen. Der Weg in das Chaos kann aber von Kaskade zu Kaskade unterschiedlich sein. Zeitserien und Spektren werden nur für den Bereich $K_{ec} = 0$ bis $K_{ec} = 0.5$ betrachtet, da das hier verwendete LK-artige Modell für Rückkopplungsstärken ab $K_{ec} \approx 0.3$ keine verlässlichen Aussagen liefert (siehe Kapitel 4.2). Die erste Kaskade werden wir bei der Analyse der Zeitserien und Spektren in Abb. 8.17 und Abb. 8.18 noch genauer betrachten.

Qualitative Änderungen des Bifurkationsdiagramms stimmen mit der Entstehung von Moden-Antimoden-Paaren externer Resonatormoden mit negativer Frequenzverschiebung $\Delta\omega_s < 0$ gegenüber der Schwellwertfrequenz ω_{th} der solitären Laserdiode überein. Moden-Antimoden-Paare mit negativer Frequenzverschiebung sind in Abbildung Abb. 8.14(a) und Abb. 8.14(b) mit schwarzen, strich-punktierten Linien gekennzeichnet. Für die zweite Kaskade fällt die Entstehung eines Paares mit dem Beginn eines chaotischen Bereiches zusammen. Bei der dritten und vierten Kaskade stimmt die Entstehung der Paare eher mit periodischen Fenstern überein. Ähnliche Ergebnisse erhielten auch Hohl und Gavrielides [HOH99]. Die Autoren untersuchten einen Quantengrabenlaser mit externer Rückkopplung in der Nähe der Laserschwelle sowohl experimentell als auch theoretisch. Mit einem dimensionslosen LK-Modell errechneten sie ein Bifurkationsdiagramm der Maxima der Feldamplitude in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke. Sie fanden, dass der Beginn der chaotischen Bereiche in ihrem Bifurkationsdiagramm mit der Entstehung neuer Modenpaare übereinstimmt. Bei dem Übergang von dem chaotischen zu dem Bereich stabiler stationärer Laseremission wird die jeweils neu erzeugte Knoten-Lösung stabil.

In Abb. 8.15 ist eine Ausschnittsvergrößerung des Bifurkationsdiagrammes Abb. 8.14(a) wiedergegeben. Blaue, strich-punktierte Linien bezeichnen wieder Rückkopplungsstärken, für die ein Ausschnitt der Zeitserie, das Spektrum sowie die Projektionen der Trajektorie auf die (n_e, n_{ph}) - und die (n_h, n_{ph}) -Ebene betrachtet werden. Abb. 8.17(b) zeigt Zeitserie und Spektrum ohne Rückkopplung ($K_{ec} = 0$) und mit Rückkopplung in stabilen, stationären Zuständen vor der ersten Kaskade ($K_{ec} = 0.02$) und nach der ersten Kaskade ($K_{ec} = 0.16$). Wieder ist vor der ersten Hopfbifurkation eine Entdämpfung der Relaxationsoszillationen zu beobachten. Die Frequenz der Relaxationsoszillationen vor der Kaskade $\nu_{RO}(K_{ec} = 0.02) = 2.3\text{ GHz}$ stimmt fast mit der Frequenz für die solitäre Laserdiode $\nu_{RO}(K_{ec} = 0) = 2.0\text{ GHz}$ überein. Dies ist zu erwarten, da dem System nur die externe Resonatormode zur Verfügung steht, die aus der solitären Lasermode hervorgegangen ist (siehe Abb. 8.14(b)).

Hinter der Kaskade existiert eine deutlich niedrigere Frequenz von etwa 1 GHz und zwei weitere nicht gut aufgelöste Frequenzen bei etwa 3 GHz und 4 GHz . Bei der Frequenz von 4 GHz handelt es sich um die Frequenz der Relaxationsoszillationen für

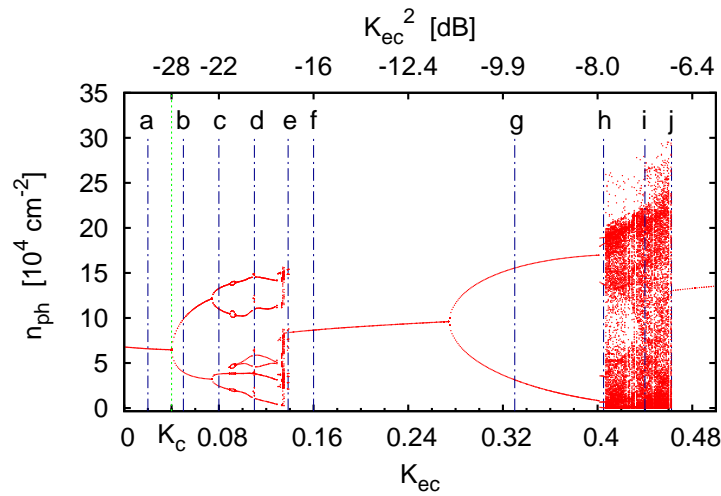


Abbildung 8.15.: Ausschnittsvergrößerung des Bifurkationsdiagramms der Photonendichte für $\alpha = 3$ und $\Gamma = 0.0011$ über K_{ec} und K_{ec}^2 im Bereich von $K_{ec} = 0$ bis $K_{ec} = 0.5$. Blaue, strich-punktierte Linien markieren Rückkopplungsstärken, für die Zeitserien und Spektraldichten diskutiert werden. Parameterwerte sind wie in Abb. 8.14(a).

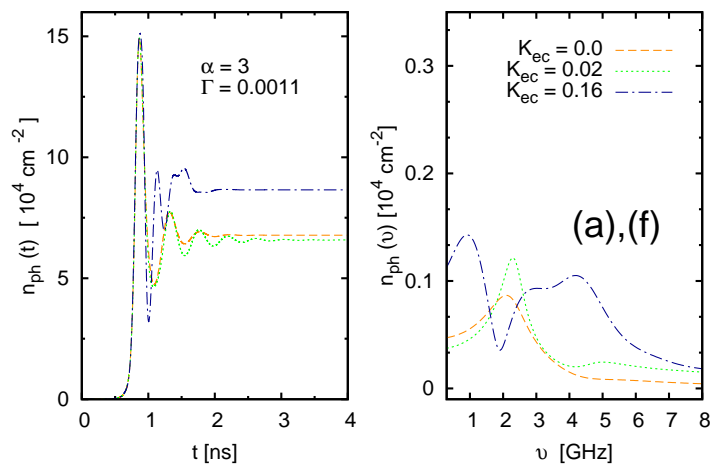


Abbildung 8.16.: Zeitserie und Spektrum ohne Rückkopplung ($K_{ec} = 0$), im stabilen, stationären Zustand vor ($K_{ec} = 0.02$) und nach der ersten Kaskade ($K_{ec} = 0.16$). Andere Parameterwerte wie in Abb. 8.14(a).

K_{ec} -Werte innerhalb der zweiten Bifurkationskaskade ($0.405 \leq K_{ec} < 0.465$).

Beginnend bei kleinen Rückkopplungsstärken wird das System bei $K_c = 0.04$ in einer Hopfbifurkation einer rotierenden Welle instabil. In unmittelbarer Nähe des Bifurkationspunktes ist für anwachsende K_{ec} das für eine Hopfbifurkation typische wurzelförmige Ansteigen der Maxima der Photonendichte erkennbar. Abb. 8.17(b) zeigt einen Ausschnitt der Zeitserie mit entdämpften Relaxationsoszillationen, das Spektrum und die Projektionen auf die (n_e, n_{ph}) - und die (n_h, n_{ph}) -Ebene. Die Projektionen der Trajektorie zeigen Grenzzyklen. Dabei ist der Rotationsinn wie in dem stark gedämpften Fall ($\Gamma = 0.0011$) ohne Rückkopplung (siehe Abb. 7.7(a) und (e)) im Uhrzeigersinn für die Elektronen und entgegen des Uhrzeigersinns für die Löcher. Dies stimmt mit der Rotationsrichtungen der Grenzzyklen im Fall eines kleinen α -Faktors von $\alpha = 1$ überein (siehe Abb. 8.8(b)). Das Spektrum zeigt die Frequenz der Relaxationsoszillationen $\nu_{RO}(K_{ec} = 0.05) = 2.3$ GHz sowie deren Harmonische.

Bei $K_{ec} = 0.074$ findet eine Periodenverdoppelungsbifurkation statt. Abb. 8.17(c) zeigt Zeitserienausschnitt, Spektrum sowie Phasenraumprojektionen für $K_{ec} = 0.08$. Die Frequenz der Relaxationsoszillationen beträgt $\nu_{RO}(K_{ec} = 0.08) = 2.3$ GHz. Der Peak bei $\frac{1}{2}\nu_{RO}$ markiert die Periodenverdoppelung. Die Phasenraumprojektionen zeigen zweifach gewickelte Orbits.

Abb. 8.17(d) zeigt Zeitserienausschnitt, Spektrum sowie Phasenraumprojektionen von $K_{ec} = 0.1098$. Bei dieser Rückkopplungsstärke wird ein weiteres Moden-Antimoden-Paar von externen Resonatormoden für das System verfügbar (siehe Abb. 8.14). In dem Bifurkationsdiagramm zeigt sich an dieser Stelle eine abrupte Vergrößerung des Attraktors. Die Zeitserie wirkt auf den ersten Blick wie eine Oszillation der Periode drei. Sie besteht aus Drei-Peak-Oszillation, die sich zusammensetzen aus einer Schwingung großer Amplitude von etwa $15 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$, gefolgt von einer Schwingung deutlich kleinerer Amplitude von $6.5 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$, an die sich eine Schwingung mittlerer Amplitude mit etwa $12 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$ anschließt. Allerdings sind die Amplituden aufeinanderfolgender Drei-Peak-Oszillationen nicht wie bei einer Schwingung der Periode drei exakt gleich groß. Die Bewegung in dem Phasenraum erfolgt deshalb nicht auf einem dreifach gewickelten Orbit, sondern auf einer voluminöseren Struktur. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, dass das System chaotisch ist. Auch das Spektrum zeigt nicht die für eine Oszillation der Periode drei typischen Peaks bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der Grundfrequenz. Es sind hingegen fünf deutlich unterscheidbare Frequenzen zu erkennen, die über einen „verrauschten“ Hintergrund hinausragen. Die niedrigste Frequenz $\nu = 1$ GHz ist die Wiederholungsfrequenz der Drei-Peak-Oszillationen. Der Peak bei $\nu = 3.06$ GHz wird durch die Schwingung mit der kleinsten Amplitude gefolgt von der mit der mittleren bewirkt. Der größte Peak im Spektrum bei $\nu = 2$ GHz wird durch das Aufeinanderfolgen der Schwingungen mit der mittleren und mit der größten Amplitude verursacht. Dies ist ungefähr die Frequenz der Relaxationsoszillationen nach der ersten Hopfbifurkation. Der Peak bei $\nu_{RO}(K_{ec} = 0.1098) = 4.1$ GHz kommt durch das Aufeinanderfolgen der Schwingung mit der größten Amplitude und der Schwingung mit der kleinsten zu Stande. Es ist genau die Frequenz der Relaxationsoszillationen für das System nach der ersten Bifurkationskaskade. Das Auftreten der beiden Relaxationsoszillationsfrequenzen könnte auf ein Nebeneinander der Mode, die aus der solitären Laserdiode entstanden ist, und der neu hinzugekommenen Knoten-Lösung hindeuten.

Am Ende der ersten Bifurkationskaskade für $K_{ec} = 0.1385$ tritt noch einmal ein pul-

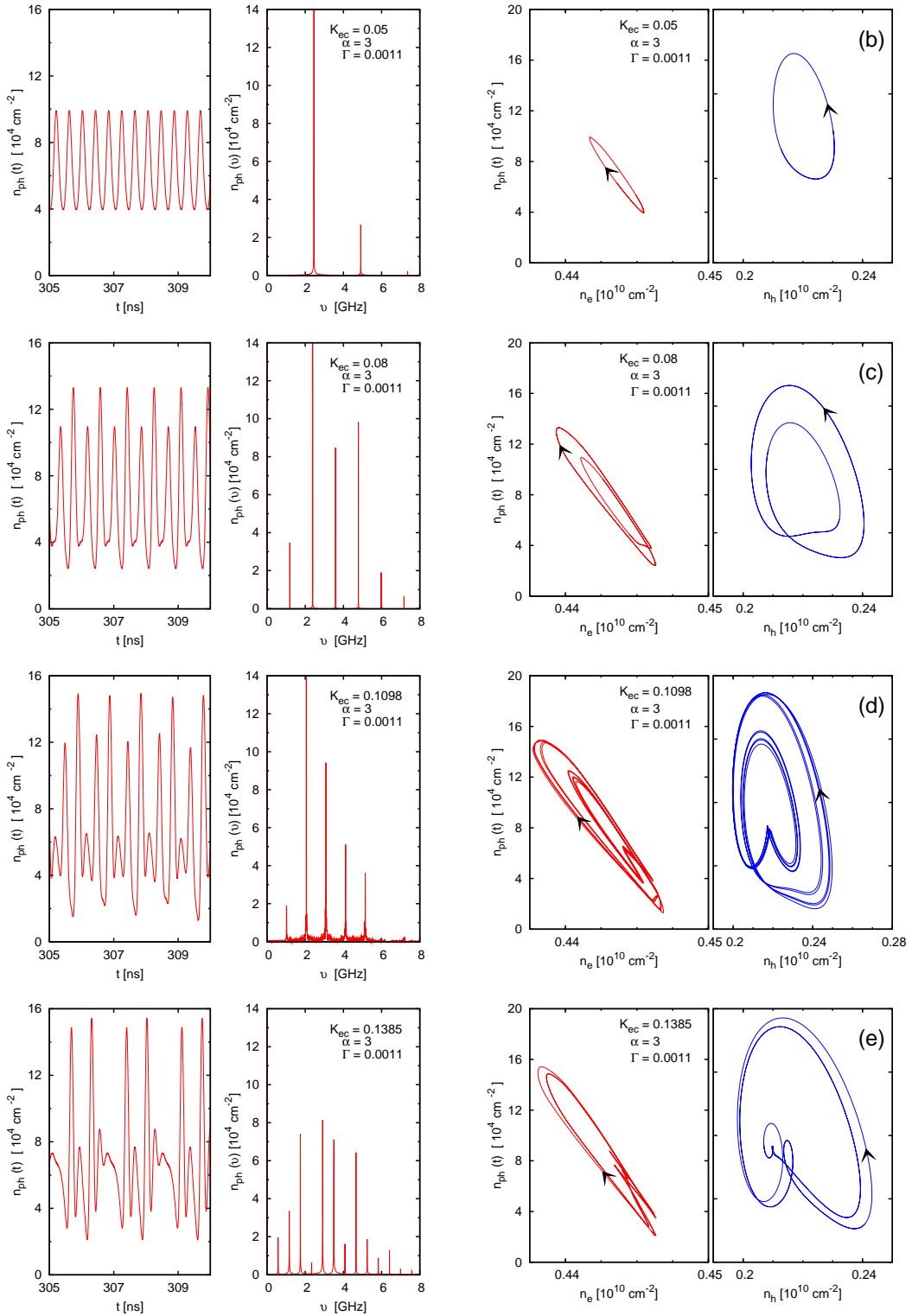


Abbildung 8.17.: Erste Bifurkationskaskade: Zeitserienausschnitte, Spektraldichten sowie Projektionen auf die (n_e, n_{ph}) - und die (n_h, n_{ph}) -Ebene für $\alpha = 3$ und $\Gamma = 0.0011$ für Rückkopplungsstärken zwischen $K_{ec} = 0.05$ und $K_{ec} = 0.138$ (blaue, strich-punktierte Linien (b)-(e) in Abb. 8.15). Andere Parameterwerte wie in Abb. 8.14(a).

sierender Zustand der Photonendichte auf. In Abb. 8.17(e) sind ein Ausschnitt der Zeitserie, das Spektrum, sowie die Phasenraumprojektionen wiedergegeben. Die Zeitserie besteht aus einer Aneinanderreihung von regulären Fünf-Peak-Oszillationen, die im Folgenden als Pulspakete bezeichnet werden. Das Spektrum zeigt klar voneinander separierte Peaks ohne „verrauschten“ Hintergrund. Jedes der Pakete beginnt mit einer Schwingung großer Amplitude von $15.5 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$, gefolgt von zwei Relaxationsoszillationen kleinerer Amplitude ($9 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$ und $7 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$). An diese schließt sich eine Schwingung mit der zweithöchsten Amplitude von $15 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$ an. Das Pulspaket wird von einer Schwingung mit einer Amplitude von $7 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$ beendet, die wieder als Relaxationsoszillation gedeutet werden kann. Die niedrigste Frequenz in dem Spektrum $\nu_{\text{PP}}(K_{ec} = 0.1385) = 0.65 \text{ GHz}$ ist der Einhüllenden der Pulspakete zuzuordnen. Die Frequenz der Relaxationsoszillationen macht sich durch einen kleinen Peak bei $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.1385) = 4.1 \text{ GHz}$ bemerkbar. Die Fünf-Peak-Oszillation kann als Analogon der regulären Pulspakete für $\alpha = 1$ gewertet werden. Sie enthält jedoch deutlich weniger ausgeprägte Relaxationsoszillationen. Daher spiralt sich die Trajektorie nicht so eng auf wie in dem Fall kleiner Phasen-Amplitudenkopplung $\alpha = 1$ (siehe Abb. 8.10). Ein weiterer Unterschied ist, dass die Trajektorie innerhalb eines Pulspakets zweimal in die Region niedriger Ladungsträgerinversion und damit kleiner optischer Verstärkung reinjiziert wird. Dies drückt sich in der Zeitserie durch zweimaliges deutliches Absinken der Photonendichte innerhalb einer Fünf-Peak-Oszillation aus.

Zweite Bifurkationskaskade

Für größere K_{ec} -Werte geht das System wieder in einen stabilen, stationären Zustand über. Die Photonendichte dieses Fixpunktes steigt mit der Rückkopplungsstärke schwach an. Bei $K_{c,1} = 0.27$ unterläuft das System einer Hopfbifurkation einer rotierenden Welle. Deutlich zeigt sich das wurzelförmige Anwachsen der Maxima der Photonendichte oberhalb des Bifurkationspunktes. In Abb. 8.18(g) sind Zeitserienausschnitt, Spektrum und Phasenraumprojektionen für $K_{ec} = 0.33$ dargestellt. Die Zeitserie zeigt die für die Bewegung auf einem periodischen Orbit typischen entdämpften Relaxationsoszillationen konstanter Amplitude. Aus dem Spektrum wird ersichtlich, dass die Frequenz der Relaxationsoszillationen nun $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.33) = 4.1 \text{ GHz}$ beträgt.

Bei $K_{ec} = 0.406$ vergrößert der Attraktor sein Volumen deutlich und es schließt sich ein chaotisch wirkendes Band an. In der Zeitserie für $K_{ec} = 0.405$ (siehe Abb. 8.18(h)), also kurz vor dem Einsetzen des chaotisch wirkenden Bereichs, ist deutlich eine Oszillation der Periode drei zu erkennen. Die Projektionen der Phasenraumtrajektorie bewegen sich auf dreifach gewickelten periodischen Orbits. Das Frequenzspektrum zeigt die für eine Oszillation der Periode drei typischen Maxima bei der Frequenz der Relaxationsoszillationen $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.405) = 4.1 \text{ GHz}$ sowie bei $\frac{1}{3}\nu_{\text{RO}}$ und $\frac{2}{3}\nu_{\text{RO}}$. Das System scheint dieses Mal einen anderen Weg in das Chaos zu wählen, da keine Kaskade von Periodenverdoppelungsbifurkationen aufgelöst ist. Interessant ist bei diesem Bereich instabiler Laseremission, dass die Projektionen der Trajektorie auf die (n_e, n_{ph}) -Ebene nun ebenso wie die Projektion auf die (n_h, n_{ph}) -Ebene im Gegenuhrzeigersinn verläuft. Sie legt also nicht mehr den Rotationssinn im Uhrzeigersinn an den Tag, der dem stark gedämpften Fall ($\Gamma = 0.0011$) ohne Rückkopplung eigen ist (siehe Abb. 7.71 (a)). Stattdessen verhält sich die Trajektorie wie in dem Übergangsregime zwischen

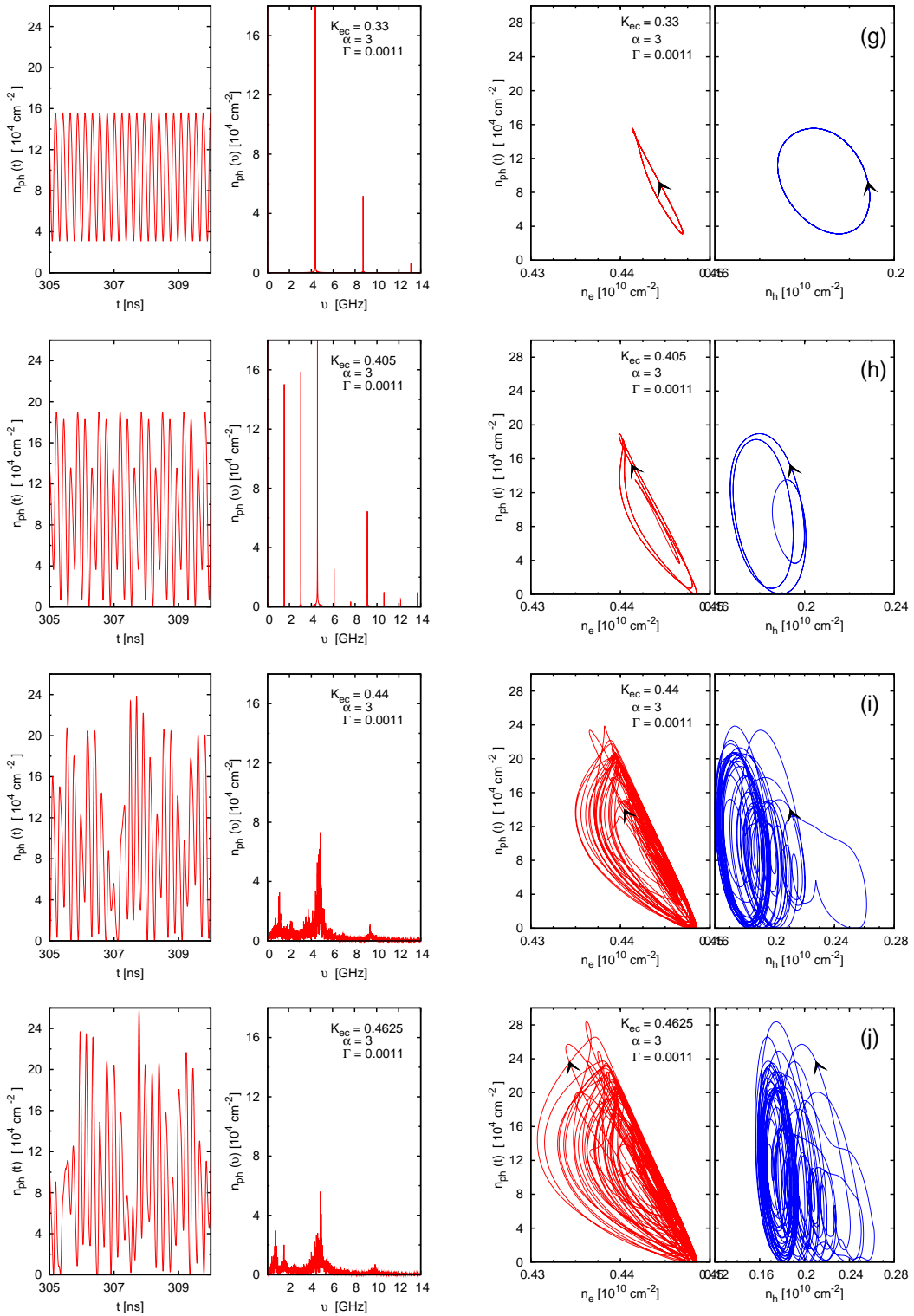


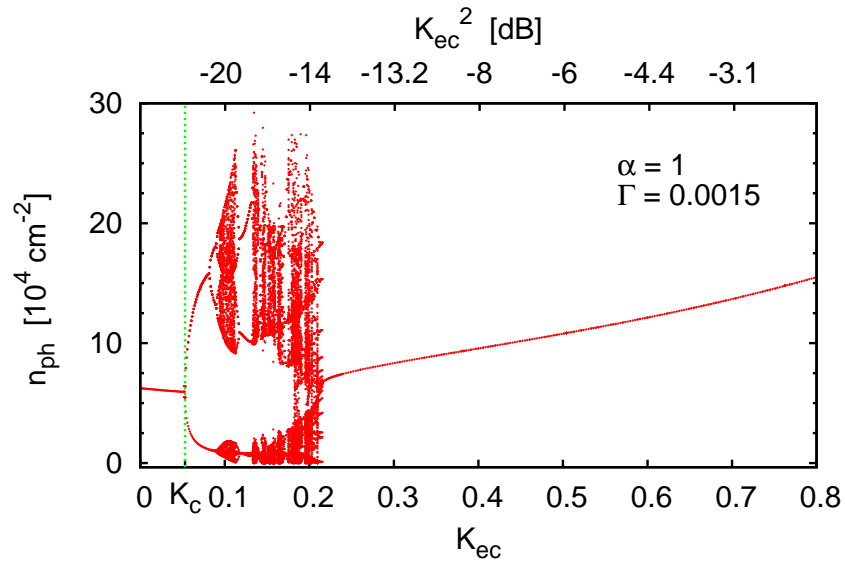
Abbildung 8.18.: Zweite Bifurkationskaskade: Zeitserienausschnitte, Spektraldichten sowie Projektionen auf die (n_e, n_{ph}) - und die (n_h, n_{ph}) -Ebene für $\alpha = 3$ und $\Gamma = 0.0011$ und Rückkopplungsstärken zwischen $K_{ec} = 0.33$ und $K_{ec} = 0.4625$ (blaue, strich-punktierte Linien (g)-(j) in Abb. 8.15). Andere Parameterwerte wie in Abb. 8.14(a).

dem stark gedämpften und dem oszillatorischen Regime (siehe Abb. 7.7I (b)). Damit gleicht die Dynamik der Laserdiode für den größeren α -Faktor von $\alpha = 3$ eher der eines gewöhnlichen Quantengrabenlasers, bei dem die Trajektorie in der Projektion auf die aus Photonendichte und Inversionsladungsdichte $n(t) = n_e + n_h - N^{\text{VAL}}$ aufgespannte Ebene entgegen des Uhrzeigersinns rotiert. Wie genau der Übergang von einer Bewegung des Systems auf einem stabilen periodischen Orbit zu einer Bewegung innerhalb des chaotischen Attraktors für $K_{ec} \geq 0.406$ stattfindet, muss noch untersucht werden. In Abb. 8.18(i) ist ein Zeitserienausschnitt, ein Spektrum sowie die Phasenraumprojektionen für $K_{ec} = 0.44$, also innerhalb des chaotisch wirkenden Attraktors, (blaue, strich-punktierte Linie **i** in Abb. 8.15) dargestellt. Die Zeitserie besteht aus unregelmäßigen Pulspaketen, zwischen denen die Photonendichte auf Null abfällt. Eines dieser Pulspakete ist zwischen 307.1 ns und 309.1 ns dargestellt. Die einzelnen Schwingungen eines Pakets erfolgen mit der Frequenz der Relaxationsoszillationen $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.44) = 4.1 \text{ GHz}$. Das Spektrum zeigt ein für chaotische Bewegungen typisches breites Band nicht aufgelöster Frequenzen. Aus diesem heben sich zwei, ebenfalls stark verbreiterte, Frequenzberge hervor. Der niedrigfrequente Peak bei $\nu_{\text{PP}}(K_{ec} = 0.44) = 1 \text{ GHz}$ ist die Frequenz der Einhüllenden der Pulspakete. Der höherfrequente Peak bei $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.44) = 4.8 \text{ GHz}$ ist die Frequenz der Relaxationsoszillationen, die sich innerhalb des chaotischen Bandes um 0.7 GHz erhöht hat. Die Phasenraumprojektionen zeigen, dass der Attraktor ein großes Phasenraumvolumen einnimmt, wie es für chaotische Attraktoren typisch ist.

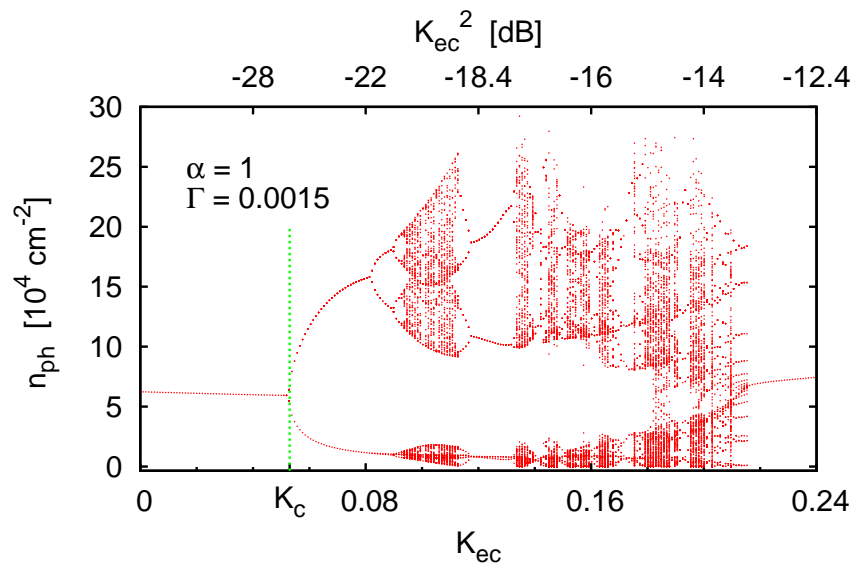
Bei $K_{ec} = 0.463$ reduziert der Attraktor sein Volumen drastisch und wird wieder zu einem periodischen Orbit in der Phase, was einen stabilen, stationären Zustand in der Photonendichte bedeutet. Abb. 8.18(j) zeigt Zeitserienausschnitt, Spektrum und Phasenraumprojektionen für $K_{ec} = 0.4625$, also kurz vor der Bifurkation. Für kleines $\alpha = 1$ und $\Gamma = 0.0011$ treten kurz vor dem Zusammenfall des Attraktors reguläre Pulspakete auf (siehe Abb. 8.9 und Abb. 8.10). Auch in diesem Fall sind Pulspakete zu erkennen, die aber wesentlich irregulärer sind. In dem Phasenraum nimmt der Attraktor ein größeres Volumen als für den Fall $\alpha = 1$ ein. Es bleiben aber Reinjektionen in den Bereich geringer Ladungsträgerinversion erhalten, die für den Zustand pulsierender Ladungsträgerinversion typisch sind. Die Frequenz der Relaxationsoszillationen beträgt nun $\nu_{\text{RO}}(K_{ec} = 0.4624) = 4.9 \text{ GHz}$. Neben der Frequenz der Einhüllenden der Pulspakete $\nu_{\text{PP}} = 0.83$ hebt sich noch deren erste Harmonische aus dem Band nicht aufgelöster Frequenzen ab. Vermutlich liegt ein ähnlicher Mechanismus wie bei den regulären Pulspaketen für $\alpha = 1$ und $\Gamma = 0.0011$ zugrunde. Ist dies der Fall könnte die Irregularität der Pulspakete darauf hindeuten, dass sich für höhere α -Faktoren komplexere dynamische Szenarien ausbilden. Dadurch kann die Entwicklung der einzelnen Instabilitäten und Pulsationen nicht mehr so gut nachverfolgt werden. Dies wäre in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Carroll et al. [CAR06a].

8.3.2. Abhängigkeit der Laserdynamik von dem Γ -Faktor

In diesem Abschnitt wird der Einfluss des optischen Füllfaktors Γ auf das Bifurkationsdiagramm der Laserdiode untersucht. Dazu wird ein kleiner α -Faktor von $\alpha = 1$ und ein optischer Füllfaktor $\Gamma = 0.0015$ in dem oszillatorischen Regime gewählt. Das Bifurkationsdiagramm für $K_{ec} = 0.0$ bis $K_{ec} = 0.8$ ist in Abb. 8.19 dargestellt. Es zeigt wie für den stark gedämpften Fall ($\alpha = 1, \Gamma = 0.0011$) nur eine Bifurkationskas-



(a)



(b)

Abbildung 8.19.: (a): Bifurkationsdiagramm der Photonendichte über K_{ec} und K_{ec}^2 in dB. Die grüne, gepunktete Linie markiert die Hopfbifurkation mit der niedrigsten Rückkopplungsstärke $K_{ec} = 0.053$. (b): Ausschnittsvergrößerung des Bifurkationsdiagrammes der Photonendichte über K_{ec} im Bereich von $K_{ec} = 0$ bis $K_{ec} = 0.25$. Die maximale Stromdichte beträgt das 2,5-fache der Schwellwertstromdichte für die Laserdiode ohne Rückkopplung $j_{th}(\Gamma = 0.0015) = 2408 \text{ Acm}^{-2}$. Parameterwerte: $l = 25 \text{ mm}$, $\alpha = 1$, $\Gamma = 0.0015$ und $\Theta = \pi$; andere Parameter wie in Tabelle 5.1.

kade (vergleiche Abb. 8.4). Die Laserdiode reagiert im Vergleich zu diesem sensibler auf optische Rückkopplung. So beträgt die kritische Rückkopplungsstärke, bei der die erste Hopfbifurkation auftritt, nun $K_c = 0.053$ im Vergleich zu $K_c = 0.072$. Die Diode bleibt jedoch länger stabil als für den stark gedämpften Fall mit höherem α -Faktor ($\alpha = 3, \Gamma = 0.0011$), für den die kritische Rückkopplungsstärke $K_c = 0.04$ beträgt. Die Ausschnittsvergrößerung Abb. 8.19(b) zeigt, dass die Gestalt der Bifurkationskaskade sehr ähnlich zu der in dem stark gedämpften Regime mit kleinem α -Faktor ist (vergleiche Abb. 8.5). Nach einer primären Hopfbifurkation folgt eine Kaskade von Periodenverdoppelungsbifurkationen, die in das Chaos führt. Der chaotische Bereich zeigt ebenfalls mehrere periodische Fenster. Besonders markant ist ein breites Fenster der Periode zwei für die Werte von $K_{ec} = 0.115$ bis $K_{ec} = 0.13$. Damit ist es etwas schmaler als in dem stark gedämpften Fall, für den es von $K_{ec} = 0.115$ bis $K_{ec} = 0.16$ reicht. Am Ende der Bifurkationskaskade zeigen sich wieder reguläre Pulspakete. Diese gehen bei exakt der gleich Rückkopplungsstärke wie für den stark gedämpften Fall $K_{ec} = 0.21623$ in einen stabilen, stationären Zustand über. Der optische Füllfaktor scheint nur einen geringfügigen Einfluss auf die Gestalt der Instabilitätsbereiche zu haben. Auf die Anzahl der Bifurkationskaskaden hat er dem Anschein nach keinen Einfluss. Das lässt sich aus dem Lösungsansatz externer Resonatormoden für das Gleichungssystem (6.11) verstehen: Die Entstehung neuer Moden-Antimodenpaare, das heißt die Anzahl der Lösungen der transzendenten Gleichung (8.5), ist unabhängig von dem optischen Füllfaktor Γ . Damit entstehen durch eine Erhöhung des Γ -Faktors keine neuen Fixpunkte des dynamischen Systems.

Abhängigkeit der Laserdynamik von Γ und α

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sowohl eine Erhöhung des α -Faktors als auch eine Erhöhung des optischen Füllfaktors Γ dazu führen, dass das System bereits bei geringeren Intensitäten des rückgekoppelten Lichts instabil wird. Die kritische Rückkopplungsstärke K_c , bei der die Laserdiode in einer Hopfbifurkation instabil wird, verringert sich. Anschaulich ist verständlich, dass ein System mit großem Γ -Faktor, das ausgeprägte schwach gedämpfte Relaxationsoszillationen ausführt, schneller durch Störungen instabil wird, als ein System mit kleinerem Γ -Faktor. Einem System mit kleinerem Γ -Faktor, das sich mit stark gedämpften weniger prononcierten Relaxationsoszillationen seinem Fixpunkt nähert. Da eine Erhöhung des α -Faktors die Lösungsstruktur des Gleichungssystems (6.11) verändert, ist sein Einfluss auf das dynamische Verhalten der Laserdiode mit Rückkopplung größer als der des Γ -Faktors. Eine Vergrößerung des α -Faktors erhöht zusätzlich die Zahl der Wechsel zwischen Bereichen in der Rückkopplungsstärke mit stabiler stationärer Laseremission und instabilen Bereichen. In Abb. 8.20 ist die kritische Rückkopplungsstärke K_c in Abhängigkeit von Γ und α aufgetragen. Farbkodiert ist die kritische Rückkopplungsstärke $K_c(\alpha, \Gamma)$. Dabei wird der α -Faktor von $\alpha = 0.1$ bis $\alpha = 5$ variiert. Niedrige Werte entsprechen eher α -Faktoren in Quantenpunktlasern, höhere Werte den α -Faktoren in Quantengrabenlasern (vergleiche Abschnitt 3.5). Der optische Füllfaktor variiert zwischen $\Gamma = 0.0011$ und $\Gamma = 0.0017$. Dabei findet der Übergang von dem stark gedämpften in das oszillatorische Regime für einen optischen Füllfaktor von $\Gamma \approx 0.0014$ statt (siehe 7.7I(c)). Die in den letzten Abschnitten gefundenen Abhängigkeiten der kritischen Rückkopplungsstärke von α und Γ werden durch Abb. 8.20 bestätigt. Die kritische Rück-

kopplungsstärke K_c fällt in der Abbildung von links unten, dem Bereich kleiner α - und Γ -Faktoren, nach rechts oben, dem Bereich größerer α - und Γ -Faktoren, von $K_{c,\max}(\Gamma = 0.0011, \alpha = 0.1) = 0.9$ bis $K_{c,\min}(\Gamma = 0.0017, \alpha = 5) = 0.02$ ab. In dem

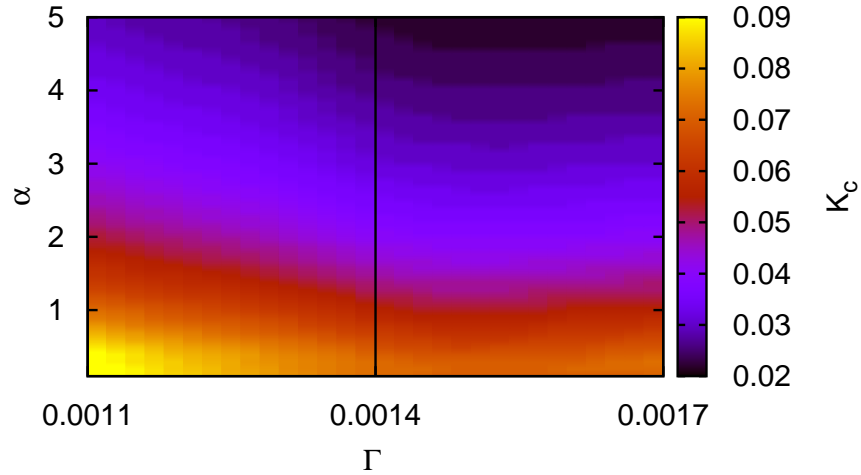


Abbildung 8.20.: Abhängigkeit der Stabilität des Lasers von α und Γ . Farbkodiert ist die Rückkopplungsstärke K_c , bei der die Hopfbifurkation mit der niedrigsten Rückkopplungsstärke stattfindet. Der α -Faktor variiert von $\alpha = 0.1$ bis $\alpha = 5$ und der optische Füllfaktor von $\Gamma = 0.0011$ bis $\Gamma = 0.0017$. Die schwarze Linie markiert den Beginn des oszillatorischen Regimes. Die Stromdichte beträgt das 2.5-fache des Schwellstroms für den jeweiligen Γ -Wert. Parameterwerte: $l = 25$ mm und $\Theta = \pi$; andere Parameter wie in Tabelle 5.1.

betrachteten Parameterbereich ist der Hopf-Punkt stärker von dem α -Faktor als von dem Γ -Faktor abhängig. So variiert die kritische Rückkopplungsstärke bei festgehaltenem Γ -Faktor maximal um $\Delta K_c = 0.06$, während sie bei festgehaltenem α -Faktor für variable Γ -Faktoren nur maximal um $\Delta K_c = 0.03$ variiert. Desweiteren ist ersichtlich, dass oberhalb eines optischen Füllfaktors von $\Gamma = 0.0014$, das heißt in dem oszillatorischen Regime, K_c kaum mehr von dem Γ -Faktor abhängig ist.

8.4. Phasenabhängigkeit des Bifurkationsdiagramms

Wie schon in dem Abschnitt 8.1.2 beschrieben, ist in dem Regime kurzer Kavitäten die Laseremission von der Phase des zurückgekoppelten Lichts abhängig. Dies wird in diesem Kapitel für das Gleichungssystem (6.11) genauer untersucht. In Abb. 8.21 sind Maxima und Minima der Photonendichte für einen Zyklus der Phase des rückgekoppelten Lichts von 0 bis 2π dargestellt: einmal für eine kleine Rückkopplungsstärke

von $K_{ec} = 0.07$ (Abb. 8.21(a)) und einmal für eine größere Rückkopplungsstärke von $K_{ec} = 0.2$ (Abb. 8.21(b)). Es wird der einen Quantenpunktlaser beschreibende stark gedämpfte Fall ($\Gamma = 0.0011$) mit kleiner Phasen-Amplitudenkopplung ($\alpha = 1$) gewählt. Die grüne, punktierte Linie zeigt die Gleichgewichtsphotonendichte ohne Rückkopplung an.

Für die schwache Rückkopplungsstärke von $K_{ec} = 0.07$ (siehe Abb. 8.21(a)) bleibt die Laserdiode über den gesamten Zyklus hinweg in einem stabilen, stationären Zustand. Deshalb fallen Maxima und Minima zusammen. Bei gegenphasiger Einkopplung des Lichts aus der externen Kavität wird die Photonendichte des gesamten Lasers, aufgrund von destruktiver Interferenz, verringert. Der Kurvenverlauf ist jedoch nicht symmetrisch, weshalb der Bereich destruktiver Interferenz nicht ganz von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$ reicht. Der Grund dafür wird aus der Gleichung für die Gleichgewichtsphotonendichte $n_{ph,s}$ (8.7a) ersichtlich. So ist $n_{ph,s}$ nicht nur direkt über das Argument des Kosinus von der Phase des rückgekoppelten Lichts Θ abhängig, sondern auch über die Ladungsträgerdichten und die Frequenzverschiebung $\Delta\omega_s$. Da bei den gewählten Rückkopplungsstärken der Einfluss der Rückkopplung auf die Ladungsträgerdichten gering ist, bewirkt die Θ -Abhängigkeit von $\Delta\omega_s$ (vergleiche (??)) wahrscheinlich den größten Beitrag. Abb. 8.21(b) zeigt ein Bifurkationsdiagramm für eine höhere Rückkopplungs-

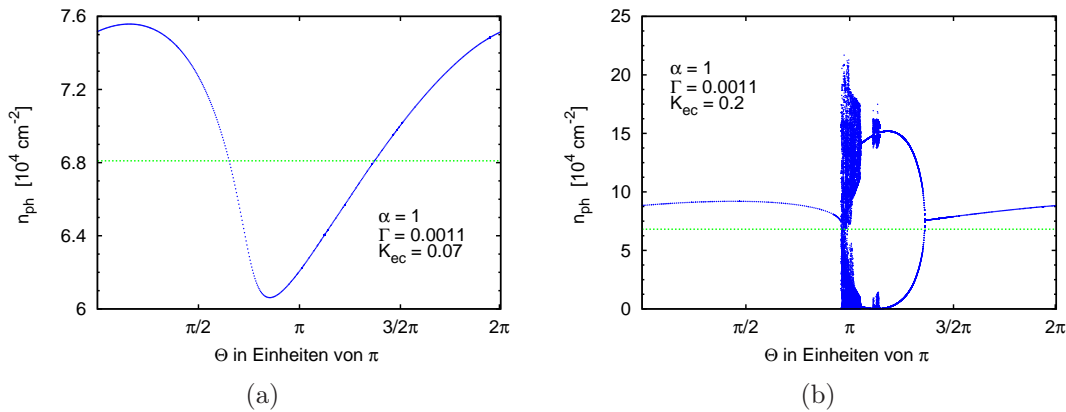


Abbildung 8.21.: Einfluss der Rückkopplungsphase auf die Photonendichte für $K_{ec} = 0.07$ (a) und $K_{ec} = 0.2$ (b). Die grüne punktierte Linie bezeichnet die Photonendichte des stabilen, stationären Zustands ohne Rückkopplung. Die maximale Stromdichte beträgt das 2.5-fache der Schwellstromdichte für die Laserdiode ohne Rückkopplung $j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 3708 \text{ Acm}^{-2}$. Parameterwerte: $l = 25 \text{ mm}$, $\alpha = 1$, $\Gamma = 0.0011$; andere Parameterwerte wie in Tabelle 5.1.

stärke von $K_{ec} = 0.2$. Aus Abb. 8.22(c) (identisch mit Abb. 8.5) wird ersichtlich, dass die Laserdiode für diese Rückkopplungsstärke und gegenphasige Wiedereinkopplung ($\Theta = \pi$) chaotisches Verhalten zeigt. Abhängig von Θ sind in Abb. 8.21(b) stabile und instabile Bereiche zu erkennen. Bei $\Theta = 2\pi$ befindet sich der Laser in einem stabilen, stationären Zustand. Für fallende Θ wird bei $\Theta = 1.26\pi$ die Laserdiode in einer Hopfbifurkation instabil. Bei $\Theta = 1.14\pi$ folgt ein kurzer, chaotisch wirkender Bereich, der in ein Fenster der Periode zwei übergeht. An dieses Fenster schließt sich ein weiteres chaotischen Band für $\Theta = 1.10\pi$ an. Der Attraktor erhöht zuerst sein Volumen,

um dann bei $\Theta = 0.95\pi$ abrupt wieder auf einen stabilen Grenzzyklus in der Phase überzugehen. Kurz vor dem Zusammenfallen des Attraktors zeigen die Zeitserien der Photonendichte wieder reguläre Pulspakete. In Abb. 8.22 sind Bifurkationsdiagramme

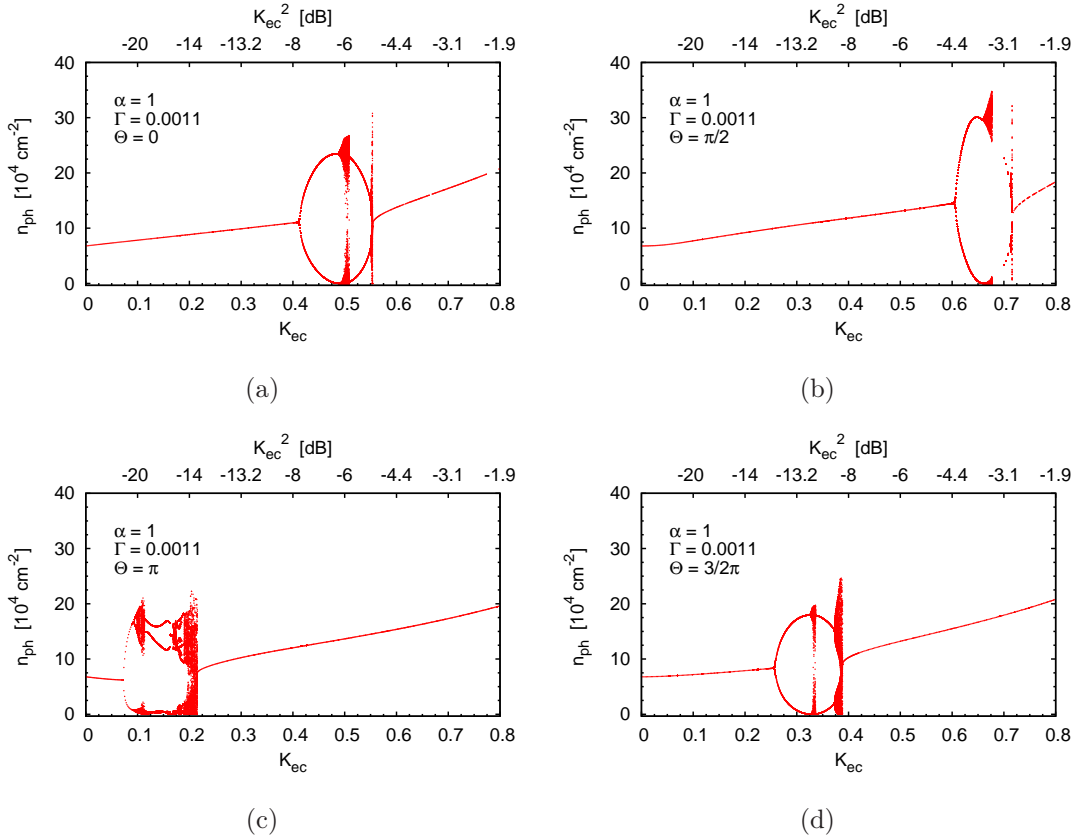


Abbildung 8.22.: Bifurkationsdiagramme der Photonendichte über der Rückkopplungsstärke K_{ec} und K_{ec}^2 in dB in dem stark gedämpften Regime für ausgewählte Werte der Phase des rückgekoppelten Lichts Θ : (a) : $\Theta = 0$, (b): $\Theta = \frac{\pi}{2}$, (c) : $\Theta = \pi$, (d) : $\Theta = \frac{3}{2}\pi$. Die maximale Stromdichte beträgt das 2.5-fache der Schwellstromdichte für die Laserdiode ohne Rückkopplung $j_{th}(\Gamma = 0.0011) = 3708 \text{ Acm}^{-2}$. Parameterwerte: $l = 25 \text{ mm}$, $\alpha = 1$, $\Gamma = 0.0011$; andere Parameterwerte wie in Tabelle 5.1.

der Photonendichte über der Rückkopplungsstärke für $\Theta = 0$ (Abb. 8.22(a)), $\Theta = \pi/2$ (Abb. 8.22(b)), $\Theta = \pi$ (Abb. 8.22(c)) und $\Theta = 3\pi/2$ (Abb. 8.22(d)) für den stark gedämpften Fall ($\Gamma = 0.0011$, $\alpha = 1$) dargestellt. Sie zeigen, dass sich zum einen die Gestalt der Bifurkationskaskade mit Θ ändert. Das heißt, die Art der Bifurkationen in dem Instabilitätsbereich verändert sich. Zum anderen verschiebt sich die Lage der Bifurkationskaskade bezüglich der Rückkopplungsstärke. Dies muss in Folgearbeiten genauer untersucht werden.

Das Bifurkationsszenario aus Abb. 8.21(b) hat Ähnlichkeit zu den Ergebnissen von Heil et al. [HEI03a]. Ein von ihnen berechnetes Bifurkationsdiagramm der Feldamplitude in Abhängigkeit der Phase des rückgekoppelten Lichts für eine Zyklus von $-\pi$ bis π ist in Abb. 8.23 reproduziert. Es ist ein kurzer Bereich stabiler Laseremission zu erkennen.

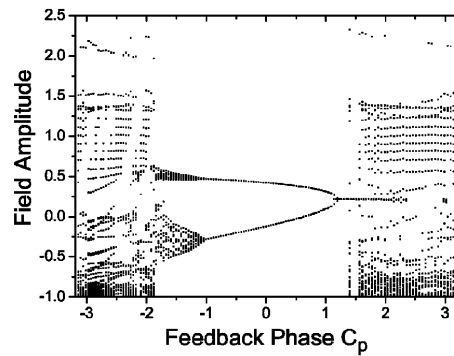


Abbildung 8.23.: Bifurkationsdiagramm der Feldamplitude für einen Zyklus der Phase des rückgekoppelten Lichts C_p von $-\pi$ bis π . Reproduziert aus [HEI03a].

Für fallende Phasen wird das System auch bei ihnen in einer Hopfbifurkation einer rotierenden Welle instabil und unterläuft darauf einer Torusbifurkation. Für den Wert -1.95 der Phase wächst der Attraktor dramatisch an. In diesem Regime zeigt die Laserdiode zunehmend regulärer werdende Pulspakete. Der deutlich kleinere Bereich, in dem das von ihnen untersuchte System stabil ist, ist wieder ein Indiz dafür, dass Quantenpunktlaser weniger sensibel auf Rückkopplung reagieren als Quantentrog-Laser.

9. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das Verhalten eines Quantenpunktlasers mit schwacher optischer Rückkopplung von einem externen Spiegel untersucht. Ein einfaches und erfolgreiches Modell zur Beschreibung schwacher optischer Rückkopplung für Quantentrogler ist das Lang-Kobayashi-Modell (LK-Modell) [LAN80a, TAR95a, TAR98]. Daher wurde es in dieser Arbeit für die Kombination mit einem Ratengleichungsmodell, das die Einschaltodynamik eines Quantenpunktlaser gut beschreibt [MAL07, MAL06, LUE08, LUE09a], ausgewählt. Mit dem kombinierten Modell kann einerseits wie beim LK-Modell optische Rückkopplung modelliert werden, andererseits wird die kompliziertere Ladungsträgerdynamik eines Quantenpunktlasers berücksichtigt. Das kombinierte Modell beinhaltet mit dem α -Faktor und dem optischen Füllfaktor Γ zwei wichtige Laserparameter, die getrennt voneinander variiert werden können. Der α -Faktor ist ein Maß für die Stärke der Phasen-Amplitudenkopplung. Der Γ -Faktor beschreibt die Kopplung zwischen dem elektrischen Feld in der Kavität und der Ladungsträgerinversion in den Quantenpunkten. Beide Parameter haben Einfluss auf die Stabilität der Laserdiode unter optischer Rückkopplung. Quantenpunktlaser zeichnen sich durch eine kleine Phasen-Amplitudenkopplung und einen kleinen optischen Füllfaktor aus. Damit wird ihre im Vergleich zu Quantentroggläsern geringere Sensibilität bezüglich optischer Rückkopplung begründet [OBR04]. In der vorliegenden Arbeit wurde in dem Regime kurzer Kavitäten die Stabilität der Laserdiode unter optischer Rückkopplung in Abhängigkeit des α - und des Γ -Faktors für ausgewählte Parametersätze untersucht. Kurze Kavitäten sind im Hinblick auf Multisektionslaser mit integrierten passiven Sektionen technologisch besonders interessant [RAD07, UKH04]. Zu Quantenpunktlasern liegen meines Wissens nach in diesem Regime noch keine Veröffentlichungen vor. In dieser Arbeit wurde herausgefunden, dass für größere α -Faktoren das System bereits bei geringeren Rückkopplungsstärken instabil wird. Auch wird das Bifurkationsszenario der Photonendichte in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke für stärkere Phasen-Amplitudenkopplung komplexer und zeigt eine steigende Anzahl von Bifurkationskaskaden. Dies kann wahrscheinlich darauf zurückgeführt werden, dass die Anzahl der Fixpunkte für das gesamte System (Laserdiode und Spiegel) mit dem α -Faktor ansteigt. Der Einfluss des optischen Füllfaktors Γ auf die Stabilität der Laserdiode ist geringer. Für steigenden Γ -Faktor erhöht sich zwar ebenfalls die Sensibilität der Laserdiode bezüglich optischer Rückkopplung, die Struktur der Instabilitäten ändert sich aber nicht grundlegend. Die Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens der Laserdiode unter optischer Rückkopplung ist in Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen [CAR06a]. Desweiteren wurde für den Fall kleiner Phasen-Amplitudenkopplung und stark gedämpfter Relaxationsoszillationen ein pulsierender Zustand der Photonendichte gefunden. Dieser ähnelt den Ergebnissen von Heil et al. für einen gewöhnlichen

Quantentrogelaser mit kurzer externer Kavität [HEI01a, HEI03a].

Zusätzlich wurde der Einfluss der Phase, mit der das an dem externen Spiegel reflektierte Licht wieder in die Laserdiode eingekoppelt wird auf die Stabilität der Laserdiode untersucht. In dem Regime kurzer Kavitäten zeigt das untersuchte Gleichungssystem eine Abhängigkeit von der Phase des rückgekoppelten Lichts in Übereinstimmung mit experimentellen und theoretischen Ergebnissen für Quantentrogelaser [HEI03a, JON01].

9.1. Ausblick

Um die Stabilitätsanalyse der Laserdiode mit Rückkopplung zu vervollständigen ist eine Bestimmung der Eigenwerte des Gleichungssystems in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke notwendig [DAH04b]. Dies ist besonders interessant um den Mechanismus, der die Pulsation der Photonendichte hervorruft, zu verstehen. Heil et al. stellten fest, dass die beobachteten regulären Pulspakete das Pendant zu Fluktuationen der Intensität niedriger Frequenz (engl. *low frequency fluctuations*) [SAN94] für das Regime kurzer Kavitäten sind. Es ist daher interessant, die Robustheit dieses Phänomens bezüglich der Länge der externen Kavität zu untersuchen.

Für die Stabilitätsanalyse und den Vergleich mit anderen Ratengleichungsmodellen für Quantenpunktlaser [ERN07a] ist sicher eine dimensionslose Formulierung des Modells vorteilhaft.

Bisher wurde in dem Modell der α -Faktor als unabhängig von der Frequenz und der Schwellstromdichte angenommen, was für Quantenpunkte nur eine unzureichende Näherung ist [SCH04d, MEL06]. In anderen Ratengleichungsmodellen für Quantenpunktlaser werden die α -Faktoren aus einem Anteil für die Benetzungsschicht und einem Anteil für die Quantenpunkte zusammengesetzt. Desweiteren werden beide Anteile als linear mit der Frequenz variierend angesetzt [OBR04, Poster-DDAYS08-GIO]. Wie wir in Kapitel 8.3 gesehen haben, hängt die Stabilität der Laserdiode entscheidend vom α -Faktor ab. Daher scheint eine genauere Beschreibung der Phasen-Amplitudenkopplung eine lohnenswerte Erweiterung für das Modell zu sein.

Auch wäre es interessant kompliziertere Rückkopplungsterme, zu betrachten. Von besonderem Interesse ist dabei eine nicht invasive Rückkopplung, die stabilisierend auf das System einwirkt [FLU07, SCH07, DAH08b]. Experimentell kann diese über ein Fabry-Perot-Interferometer realisiert werden.

In Experimenten hat sich herausgestellt, dass in direktmodulierten integrierten Zweisektionslasern Modulationsraten bis zu 40 GHz realisiert werden können (gegenüber etwa 10 GHz der solitären Laserdiode) [RAD07]. Dies mit Hilfe einer Grundlösung des Gleichungssystems (externe Resonatormoden) für das vorliegende Modell zu verstehen, scheint sehr reizvoll.

A. Ito-Transformation

A.1. Theoretische Grundlagen

Wird die spontane Emission in der Gleichung für die elektrische Feldamplitude betrachtet, muss diese als eine komplexe stochastische Differentialgleichung (Langevin Gleichung) behandelt werden:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = a(x, t) + b(x, t)\xi(t). \quad (\text{A.1})$$

Dabei sind $a(x, t)$ und $b(x, t)$ komplexwertige Funktionen und $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$ eine „schnell fluktuierende“ komplexe Zufallsvariable. Diese wird als *Gauß'sches weißes Rauschen* beschrieben. Dies bedeutet, dass die Zufallsvariable zu verschiedenen Zeitpunkten als statistisch unabhängig angenommen wird:

$$\langle \xi(t), \xi^*(t') \rangle = \delta(t - t') \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ihr Realteil ξ_1 und ihr Imaginärteil ξ_2 zu jedem Zeitpunkt t wird ebenfalls als statistisch unabhängig angenommen, d.h es gilt

$$\langle \xi_l(t), \xi_m(t') \rangle = \frac{1}{2} \delta_{lm} \delta(t - t') \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \quad l, m \in \{1, 2\}.$$

Zusätzlich ist ihr Erwartungswert zeitunabhängig und wird gleich Null gesetzt

$$\langle \xi(t) \rangle = 0.$$

Mit $\langle \cdot \rangle$ ist die statistische Mittelwertbildung gemeint. Am anschaulichsten wird die stochastische Differentialgleichung (A.1) als Integralgleichung interpretiert:

$$x(t) = x(t_0) = \int_{t_0}^t a[x(t'), t'] dt' + \int_{t_0}^t b[x(t'), t'] dW(t'). \quad (\text{A.2})$$

Dabei wurde das Inkrement eines komplexen Wiener-Prozesses formal durch

$$dW(t) = \xi(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad dW_1 + idW_2 = (\xi_1 + i\xi_2)dt$$

eingeführt. Ein komplexer Wiener-Prozess ist eine stetige, aber nirgends differenzierbare, Abbildung von einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$ in die komplexen Zahlen

$$W : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \rightarrow W(t),$$

derart, dass Real- und Imaginärteil des Bildpunktes $W(t)$ zu jedem Zeitpunkt t normalverteilte Zufallsvariablen sind. Die Normalverteilung gibt dem „Gauß'sches Rauschen“

seinen Namen. Für das stochastische Integral in (A.2), muss ein neuer Integralbegriff eingeführt werden. Es wird erst einmal für reelle Wiener-Prozesse

$$\tilde{W} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \quad t \rightarrow \tilde{W}(t)$$

definiert, lässt sich aber leicht auf komplexe verallgemeinern.

Das sogenannte *Ito-Integral* ist für einen reellen Wiener-Prozess \tilde{W} über

$$\int_{t_0}^t G(t') d\tilde{W}(t) := \text{mw-limit}_{n \nearrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n G(t_{i-1}) [\tilde{W}(t_i) - \tilde{W}(t_{i-1})] \right\} \quad (\text{A.3})$$

definiert. Mit G ist eine reellwertige stetige Funktion bezeichnet. Diese wird für das Folgende als *nicht-antizipierend* angenommen, was heißt, dass $G(t)$ für alle Zeiten t statistisch unabhängig von $\tilde{W}(s) - \tilde{W}(t)$ für $s > t$ ist. Physikalisch interpretiert bedeutet dies, dass die Größe $G(t)$ und damit auch die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (A.1) nicht von dem zukünftigen Verhalten des Systems abhängig ist. Mit mw-limit wird die Grenzwertbildung im Quadratmittel bezeichnet. Dies bedeutet, dass eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ genau dann im Quadratmittel gegen eine Zufallsvariable X konvergiert, wenn

$$\lim_{n \nearrow \infty} \int_{\mathbb{R}} p(t') [X_n(t) - X(t)]^2 dt =: \lim_{n \nearrow \infty} \langle (X_n - X)^2 \rangle = 0$$

gilt. Dabei wurde gleichzeitig noch die bereits oben erwähnte statistische Mittelwertbildung mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(t)$ definiert. Aus dem Ito-Integralbegriff folgt für Potenzen der Inkremente eines Wiener-Prozesses:

$$\int_{t_0}^t G(t') [d\tilde{W}(t')]^{2+N} = \begin{cases} \int_{t_0}^t G(t') dt' & \text{für } N = 0 \\ 0 & \text{für } N > 0 \end{cases}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Dies soll im Folgenden mit

$$d\tilde{W}(t)^2 = dt \quad \text{und} \quad d\tilde{W}(t)^{2+N} = 0 \quad (\text{A.4})$$

abgekürzt werden. Hieraus erschließt sich der entscheidende Unterschied zwischen dem Umgang mit dem Ito-Kalkül und gewöhnlicher Analysis: Locker formuliert können Terme, die quadratisch in den Inkrementen eines Wienerprozesses sind, nicht mehr vernachlässigt werden, da $|d\tilde{W}(t)|$ fast überall (d.h. bis auf eine Menge von Maß Null) von der Größenordnung $\sqrt{|t|}$ ist. Zusätzlich sind Inkremente von Wiener-Prozessen wieder Wienerprozesse und zu verschiedenen Zeitpunkten statistisch unabhängig voneinander. Aus (A.4) ergibt sich ein als *Ito's-Formel* bekannter Ausdruck für die stochastischen Differentialgleichung einer Funktion $f[x(t)]$ von der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung x [GAR85]:

$$\boxed{df[x(t)] = \{a[x(t), t] f'[x(t)] + b[x(t), t]^2 f''[x(t)]\} dt + b[x(t), t] f'[x(t)] d\tilde{W}(t).} \quad (\text{A.5})$$

Dabei sollen die eckigen Klammern ausdrücken, dass f von der ganzen Funktion x und nicht nur von dem Wert $x(t)$ von x an der Stelle t abhängig ist und $'$ steht für die Funktionalableitung von f nach der Funktion x .

A.2. Anwendung auf Bewegungsgleichung ohne Rückkopplung

In diesem Abschnitt wird die Bewegungsgleichung für die komplexe elektrische Feldamplitude von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten transformiert. Die Ausführung richtet sich nach [FLU07]. Für die komplexe Feldamplitude gilt:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_x(t) + i \mathcal{E}_y(t) \xrightarrow{y(t)=f[x(t)]} \mathcal{E}(t) = a(t)e^{i\phi(t)}.$$

Mit $a(t) = \sqrt{N_{ph}(t)}$ ist die reelle Amplitude von \mathcal{E} bezeichnet. Die zu transformierende Gleichung für die Feldamplitude (6.1) nimmt ohne Rückkopplung ($K_{ec} = 0$) formuliert als stochastischen Differentialgleichung die Gestalt

$$d\mathcal{E} = \{-i(\omega - \omega_{th}) + \underbrace{\Gamma(G(n) - G_{th})}_{\gamma}\} \mathcal{E} dt + \sqrt{\frac{\check{R}_{sp}}{2}} dW(t)$$

an. Dabei ist $dW(t) = dW_x(t) + i dW_y(t)$ das Inkrement des komplexen Wiener-Prozesses in kartesischen Koordinaten. Zusätzlich wurde abkürzend die Rate γ eingeführt. Die Transformation $f[\mathcal{E}]$ auf die neuen Koordinaten Ξ und ϕ wird durch

$$\Xi + i\phi := \ln(a) + \ln(e^{-i\phi}) = \ln[\mathcal{E}_x + i \mathcal{E}_y] = f[\mathcal{E}]$$

definiert. Für die neuen Koordinaten folgt direkt aus Ito's Formel (A.5) oder mit Hilfe des Ito-Kalküls:

$$d(\Xi - i\phi) = \frac{d(\mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y)}{\mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y} - \frac{[d(\mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y)]^2}{(\mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y)^2} \quad (\text{A.6a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mathcal{E}} \left\{ (\gamma - i(\omega - \omega_{th})) \mathcal{E} dt + \sqrt{\frac{\check{R}_{sp}}{2}} (dW_x + i dW_y) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\mathcal{E}^2} \left[(\gamma - i(\omega - \omega_{th})) \mathcal{E} dt + \sqrt{\frac{\check{R}_{sp}}{2}} (dW_x + i dW_y) \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{A.6b})$$

Der letzte Term in (A.6b) ist Null, da aus den Rechenregeln (A.4) und $d\tilde{W}_x d\tilde{W}_y = 0$ sich dW^2 zu Null ergibt:

$$dW^2 = \left[(dW_x + i dW_y) \right]^2 = \underbrace{dW_x^2}_{dt} + 2i \underbrace{dW_x dW_y}_0 - \underbrace{dW_y^2}_{dt} = 0.$$

Nun kann die Gleichung (A.6) in Real- und Imaginärteil aufgespalten werden, indem \mathcal{E} bezüglich der neuen Variablen Ξ und ϕ ausgedrückt wird $\mathcal{E}^{-1} = e^{-\Xi} e^{+i\phi}$:

$$d\Xi = \gamma dt + \sqrt{\frac{\check{R}_{sp}}{2}} e^{-\Xi} \underbrace{\cos(\phi) dW_x - \sin(\phi) dW_y}_{dW_\Xi} \quad (\text{A.7a})$$

$$d\phi = (\omega - \omega_{th}) dt - \sqrt{\frac{\check{R}_{sp}}{2}} e^{-\Xi} \underbrace{\sin(\phi) dW_x + \cos(\phi) dW_y}_{dW_\phi}. \quad (\text{A.7b})$$

Für die in (A.7) eingeführten Inkremente dW_Ξ und dW_ϕ gilt:

$$\begin{pmatrix} dW_\Xi \\ dW_\phi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}}_{R(\phi)} \cdot \begin{pmatrix} dW_x \\ dW_y \end{pmatrix} \quad \text{mit } R \in SO(2, \mathbb{R}).$$

Sie entstehen also durch eine Drehung $R(\phi)$ aus den Inkrementen in kartesischen Koordinaten. Da Drehungen zu den orthogonalen Transformationen gehören, sind die Inkremente dW_Ξ und dW_ϕ wieder statistisch unabhängige Wiener-Prozesse. Wieder die Ito-Formel (A.5) benutzend können die Gleichungen (A.7) nun von den Koordinaten Ξ und ϕ auf die Photonendichte $N_{ph} = a(t)^2 = e^{2\Xi}$ und die Phase ϕ transformiert werden. Mit der Transformationsvorschrift $f[\Xi] = e^{2\Xi}$ folgt:

$$dN_{ph} = \{2\gamma N_{ph} + \check{R}_{sp}\} dt + \sqrt{2\check{R}_{sp} N_{ph}} dW_\Xi \quad (\text{A.8a})$$

$$d\phi = (\omega - \omega_{th}) dt - \sqrt{\frac{\check{R}_{sp}}{2N_{ph}}} dW_\phi. \quad (\text{A.8b})$$

Daraus ergibt sich ein Differentialgleichungssystem für die Photonendichte $n_{ph} := N_{ph}/A$ und die Phase ϕ :

$$\dot{n}_{ph} = 2\Gamma\{G(n) - G_{th}\}n_{ph} + \frac{\check{R}_{sp}}{A} + F_{n_{ph}} \quad (\text{A.9a})$$

$$\dot{\phi} = (\omega - \omega_{th}) - F_\phi. \quad (\text{A.9b})$$

Die Rauschterme haben die Eigenschaften:

$$\langle F_{n_{ph}}(t) F_{n_{ph}}(t') \rangle = 2\check{R}_{sp} n_{ph} \delta(t - t') \quad \langle F_\phi(t) F_\phi(t') \rangle = \frac{\check{R}_{sp}}{2An_{ph}} \delta(t - t').$$

A.3. Transformation der Bewegungsgleichung mit Rückkopplung

Mit Rückkopplung wird genauso verfahren wie im vorhergehenden Abschnitt. Ausgangspunkt ist die Gleichung (6.10) für die komplexe elektrische Feldamplitude, die hier noch einmal wiedergegeben wird, um passende Abkürzungen einführen zu können:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} = (1 - i\alpha) \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \Gamma W A (n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}) - \kappa \right\}}_{:=\tilde{g}} \mathcal{E}(t) \\ + \underbrace{\frac{K_{ec}}{\tau_{in}}}_{R_{ec}} e^{i\Theta} \mathcal{E}_{\tau_{ec}}(t) + F_{\mathcal{E}}(t). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

In der obigen Gleichung (A.10) wurde der effektive Gewinn

$$\tilde{g} = \frac{1}{2} \left\{ \Gamma W A (n_e(t) + n_h(t) - N^{QD}) - \kappa \right\},$$

die Rückkopplungsverlustrate

$$R_{ec} = \frac{K_{ec}}{\tau_{in}}$$

sowie die Notation $\mathcal{E}_{\tau_{ec}}(t) := \mathcal{E}(t - \tau_{ec})$ eingeführt. Die Rauschterme haben die Eigenschaft:

$$\langle F_{\mathcal{E}}(t) F_{\mathcal{E}}^*(t') \rangle = \underbrace{\beta A R_{sp}}_R \delta(t - t') \quad \langle F_i(t) F_j^*(t') \rangle = \frac{1}{2} \beta A R_{sp} \delta_{ij} \delta(t - t').$$

Die stochastischen Differentialgleichungen für die neuen Koordinaten $\Xi = \ln(a(t))$ und ϕ ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} d\Xi &= \left\{ g + R_{ec} e^{\Xi - \tau_{ec}} \cos(\phi - \phi_{\tau_{ec}} + \Theta) \right\} dt + e^{-\Xi} \sqrt{\frac{R}{2}} dW_{\Xi} \\ d\phi &= \left\{ \alpha g - r_{ec} e^{\Xi - \tau_{ec}} \sin(\phi - \phi_{\tau_{ec}} + \Theta) \right\} dt + e^{-\Xi} \sqrt{\frac{R}{2}} dW_{\phi}. \end{aligned}$$

Eine weitere Transformation auf die Photonenzahl $N_{ph} = e^{2\Xi}$ und anschließende Division durch A liefert folgende Bewegungsgleichungen für die Photonendichte $n_{ph} = N_{ph}/A$ und die Phase ϕ :

$$\begin{aligned} \dot{n}_{ph} &= \left\{ \Gamma W A (n_e + n_h - N_{QD}) - \kappa \right\} n_{ph} + \beta R_{sp} \\ &\quad + 2 \frac{K_{ec}}{\tau_{in}} \sqrt{N_{ph, \tau_{ec}} N_{ph}} \cos(\phi - \phi_{\tau_{ec}} + \Theta) + \beta A R_{sp} (n_e, n_h) + F_{n_{ph}}. \end{aligned} \quad (\text{A.11a})$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \Gamma W A (n_e + n_h - N_{QD}) - \kappa \right\} \\ &\quad - \frac{K_{ec}}{\tau_{in}} \sqrt{\frac{N_{ph, \tau_{ec}}}{N_{ph}}} \sin(\phi - \phi_{\tau_{ec}} + \Theta) - F_{\phi} \end{aligned} \quad (\text{A.11b})$$

Die reellen Rauschterme haben die Korrelationseigenschaften:

$$\begin{aligned} \langle F_{n_{ph}}(t) F_{n_{ph}}(t') \rangle &= 2\beta R_{sp}(n_e, n_h) n_{ph} \delta(t - t') \\ \langle F_{\phi}(t) F_{\phi}(t') \rangle &= \beta \frac{R_{sp}(n_e, n_h)}{2n_{ph}} \delta(t - t'). \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [ABD03] S. G. Abdulrhmann, M. Ahmed, T. Okamoto, W. Ishimori, and M. Yamada: *An improved analysis of semiconductor laser dynamics under strong optical feedback*, IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. **9**, 1265–1274 (2003).
- [AGR93] G. P. Agrawal and N. K. Dutta: *Semiconductor Lasers* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1993).
- [ALS96] P. M. Alsing, V. Kovanis, A. Gavrielides, and T. Erneux: *Lang and Kobayashi phase equation*, Phys. Rev. A **53**, 4429–4434 (1996).
- [BIM99] D. Bimberg, M. Grundmann, and N. N. Ledentsov: *Quantum Dot Heterostructures* (John Wiley & Sons Ltd., New York, 1999).
- [BOR02] P. Borri, W. Langbein, S. Schneider, U. Woggon, R. L. Sellin, D. Ouyang, and D. Bimberg: *Exciton relaxation and dephasing in quantum-dot amplifiers from room to cryogenic temperature*, IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. **8**, 984–991 (2002).
- [CAR05] O. Carroll, S. P. Hegarty, G. Huyet, and B. Corbett: *Length dependence of feedback sensitivity of InAs/GaAs quantum dot lasers*, Electronics Letters **41**, 39–40 (2005).
- [CAR06a] O. Carroll, I. O’Driscoll, S. P. Hegarty, G. Huyet, J. Houlihan, E. A. Viktorov, and P. Mandel: *Feedback induced instabilities in a quantum dot semiconductor laser*, Opt. Express **14**, 10831–10837 (2006).
- [CHO94] W. W. Chow, S. W. Koch, and M. Sargent: *Semiconductor laser physics* (Springer, Berlin, 1994).
- [CZY04] G. Czycholl: *Theoretische Festkörperphysik* (Springer, 2.nd edition, 2004).
- [DAG05] B. Dagens, A. Markus, J. Chen, J. G. Provost, D. Make, O. Le Gouezigou, J. Landreau, A. Fiore, and B. Thedrez: *Giant linewidth enhancement factor and purely frequency modulated emission from quantum dot laser*, Electron. Lett. **41**, 323–324 (2005).
- [DAH04b] M. A. Dahlem and S. C. Müller: *Reaction-diffusion waves in neuronal tissue and the window of cortical excitability*, Ann. Phys. **13**, 442–449 (2004).
- [DAH08b] T. Dahms, P. Hövel, and E. Schöll: *Stabilizing continuous-wave output in semiconductor lasers by time-delayed feedback*, Phys. Rev. E **78**, 056213 (2008).
- [ERN07a] T. Erneux, E. A. Viktorov, and P. Mandel: *Time scales and relaxation dynamics in quantum-dot lasers*, Phys. Rev. A **76**, 023819–1–023819–7 (2007).

- [FIE08] B. Fiedler, S. Yanchuk, V. Flunkert, P. Hövel, H. J. Wünsche, and E. Schöll: *Delay stabilization of rotating waves near fold bifurcation and application to all-optical control of a semiconductor laser*, Phys. Rev. E **77**, 066207 (2008).
- [FIO07] A. Fiore and A. Markus: *Differential gain and gain compression in quantum-dot lasers*, IEEE J. Quantum Electron. **43**, 287–294 (2007).
- [FLU07] V. Flunkert and E. Schöll: *Suppressing noise-induced intensity pulsations in semiconductor lasers by means of time-delayed feedback*, Phys. Rev. E **76**, 066202 (2007).
- [GAR85] C. W. Gardiner: *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1985).
- [GAR02] C. W. Gardiner: *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Springer, Berlin, 2002).
- [GOM08] J. Gomis-Bresco, S. Dommers, V. V. Temnov, U. Woggon, M. Lämmlin, D. Bimberg, E. Malić, M. Richter, E. Schöll, and A. Knorr: *Impact of Coulomb scattering on the ultrafast gain recovery in InGaAs quantum dots*, Phys. Rev. Lett. **101**, 256803 (2008).
- [GEH03] E. Gehrig and O. Hess: *Spatio-Temporal Dynamics and Quantum Fluctuations in Semiconductor Lasers* (Springer, 2003).
- [GEH04] E. Gehrig, O. Hess, C. Ribbat, R. L. Sellin, and D. Bimberg: *Dynamic filamentation and beam quality of quantum-dot lasers*, Appl. Phys. Lett. **84**, 1650–1652 (2004).
- [Poster-DDAYS08-GIO] M. Gioannini: *Simulation of quantum dot lasers with weak external optical feedback*. Poster at the Dynamic Days Europe, Delft Netherlands (2008).
- [GOL82] L. Goldberg, H. F. Taylor, A. Dandridge, J. F. Weller, and R. O. Miles: *Spectral characteristics of semiconductor-lasers with optical feedback*, IEEE J. Quantum Electron. **18**, 555–564 (1982).
- [HAK85] H. Haken: *Light, Vol. 2* (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [HEI01a] T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer, and A. Gavrielides: *Dynamics of semiconductor lasers subject to delayed optical feedback: The short cavity regime*, Phys. Rev. Lett. **87**, 243901 (2001).
- [HEI03a] T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer, B. Krauskopf, K. Green, and A. Gavrielides: *Delay dynamics of semiconductor lasers with short external cavities: Bifurcation scenarios and mechanisms*, Phys. Rev. E **67**, 066214 (2003).
- [HEN82] C. H. Henry: *Theory of the linewidth of semiconductor lasers*, Quantum Electronics, IEEE Journal of **18**, 259–264 (1982).
- [HIL94] R. C. Hilborn: *Chaos and Nonlinear Dynamics* (Oxford, University Press, 1994).

- [HOH99] A. Hohl and A. Gavrielides: *Bifurcation cascade in a semiconductor laser subject to optical feedback*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1148–1151 (1999).
- [HUY04] G. Huyet, D. O’Brien, S. P. Hegarty, J. G. McInerney, A. V. Uskov, D. Bimberg, C. Ribbat, V. M. Ustinov, A. E. Zhukov, S. S. Mikhlin, A. R. Kovsh, J. K. White, K. Hinzer, and A. J. SpringThorpe: *Quantum dot semiconductor lasers with optical feedback*, phys. stat. sol. (b) **201**, 345–352 (2004).
- [IBA88] H. Ibach and H. Lüth: *Einführung in die Grundlagen der Festkörperphysik* (Springer, Heidelberg, 1988).
- [JAC98a] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York, 3 edition, 1998).
- [JON01] R. J. Jones, P. S. Spencer, J. Lawrence, and D. M. Kane: *Influence of external cavity length on the coherence collapse regime in laser diodes subject to optical feedback*, Optoelectronics, IEE Proceedings - **148**, 7–12 (2001).
- [KAN05] D. M. Kane and K. A. Shore (Editors): *Unlocking Dynamical Diversity: Optical Feedback Effects on Semiconductor Lasers* (Wiley VCH, Weinheim, 2005).
- [KUN05c] M. Kuntz: *Modulated InGaAs/GaAs Quantum Dot Lasers (Ph. D. Thesis)*, Ph.D. thesis, Technische Universität Berlin (2006).
- [KUZ95] Y. A. Kuznetsov: *Elements of Applied Bifurcation Theory* (Springer, New York, 1995).
- [LAN80b] R. Lang and K. Kobayashi: *External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties*, IEEE J. Quantum Electron. **16**, 347 (1980).
- [LAN80a] J. S. Langer: *Instabilities and pattern formation in crystal growth*, Rev. Mod. Phys. **52**, 1 (1980).
- [LUE08] K. Lüdge, M. J. P. Bormann, E. Malić, P. Hövel, M. Kuntz, D. Bimberg, A. Knorr, and E. Schöll: *Turn-on dynamics and modulation response in semiconductor quantum dot lasers*, Phys. Rev. B **78**, 035316–1–035316–11 (2008).
- [LUE08c-] K. Lüdge and E. Schöll: *private communications*, (2008).
- [LUE09a] K. Lüdge, E. Malić, and E. Schöll: *The Role of Decoupled Electron and Hole Dynamics in the Turn-on Behavior of Semiconductor Quantum-Dot Lasers*, in *Proc. 29th Int. Conference on Physics of Semiconductors (ICPS-29), Rio de Janeiro 2008*, edited by 2009), AIP Conf. Proc.
- [MAL06] E. Malić, K. J. Ahn, M. J. P. Bormann, P. Hövel, E. Schöll, A. Knorr, M. Kuntz, and D. Bimberg: *Theory of relaxation oscillations in semiconductor quantum dot lasers*, Appl. Phys. Lett. **89**, 101107 (2006).
- [MAL07] E. Malić, M. J. P. Bormann, P. Hövel, M. Kuntz, D. Bimberg, A. Knorr, and E. Schöll: *Coulomb damped relaxation oscillations in semiconductor quantum dot lasers*, IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. **13**, 1242–1248 (2007).

- [MAL08] E. Malić: *Many-particle theory of optical properties in low-dimensional nanostructures*, Ph.D. thesis (2008).
- [MAR01a] J. Márquez, L. Geelhaar, and K. Jacobi: *Atomically resolved structure of InAs quantum dots*, Appl. Phys. Lett. **78**, 2309–2311 (2001).
- [MEL06] S. Melnik, G. Huyet, and A. V. Uskov: *The linewidth enhancement factor α of quantum dot semiconductor lasers*, Optics Express **14**, 2950–2955 (2006).
- [MI05] Z. Mi, P. K. Bhattacharya, and S. Fathpour: *High-speed 1.3 μm tunnel injection quantum-dot lasers*, Appl. Phys. Lett. **86**, 153109 (2005).
- [NEW99a] T. C. Newell, D. J. Bossert, A. Stintz, B. Fuchs, K. J. Malloy, and L. F. Lester: *Gain and linewidth enhancement factor in InAs quantum-dot laser diodes*, Photonics Technology Letters, IEEE **11**, 1527–1529 (1999).
- [OBR03a] D. O’Brien, S. P. Hegarty, G. Huyet, J. G. McInerney, T. Kettler, M. Lämmelin, D. Bimberg, V. Ustinov, A. E. Zhukov, S. S. Mikhlin, and A. R. Kovsh: *Feedback sensitivity of 1.3 μm InAs/GaAs quantum dot lasers*, Electronics Letters (2003).
- [OBR04] D. O’Brien, S. P. Hegarty, G. Huyet, and A. V. Uskov: *Sensitivity of quantum-dot semiconductor lasers to optical feedback*, Opt. Lett. **29**, 1072–1074 (2004).
- [OHT06] J. Ohtsubo: *Semiconductor Lasers: Stability, Instability and Chaos* (Springer, Berlin, 2005).
- [OLS84] R. Olshansky, C. B. Su, J. Manning, and W. Powazinik: *Measurement of radiative and nonradiative recombination rates in InGaAsP and AlGaAs light sources*, IEEE J. Quantum Electron. **20**, 838–854 (1984).
- [OSI87] M. Osinski and J. Buus: *Linewidth broadening factor in semiconductor lasers – an overview*, IEEE J. Quantum Electron. **23**, 9–29 (1987).
- [PET88] K. Petermann: *Laser Diode Modulation and Noise* (KTK Scientific Publishers / Tokyo, 1988).
- [RAD07] M. Radziunas, A. Glitzky, U. Bandelow, M. Wolfrum, U. Troppenz, J. Kreissl, and W. Rehbein: *Improving the Modulation Bandwidth in Semiconductor Lasers by Passive Feedback*, IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. **13**, 136–142 (2007).
- [Rib03] C. Ribbat, R. L. Sellin, I. Kaiander, F. Hopfer, N. N. Ledentsov, D. Bimberg, A. R. Kovsh, V. M. Ustinov, A. E. Zhukov, and M. V. Maximov: *Complete suppression of filamentation and superior beam quality in quantum-dot lasers*, Appl. phys. lett. **82**, 952–954 (2003).
- [ROT05] V. Rottschäfer and B. Krauskopf: *The ECM-backbone of the Lang-Kobayashi equations: a geometric picture*, Applied Nonlinear Mathematics Research Report, University of Bristol (2005), preprint.

- [SAN94] T. Sano: *Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherence collapse of semiconductor lasers with optical feedback*, Phys. Rev. A **50**, 2719–2726 (1994).
- [SCH84a] E. Schöll, D. Bimberg, H. Schumacher, and P. T. Landsberg: *Kinetics of picosecond pulse generation in semiconductor lasers with bimolecular recombination at high current injection*, IEEE J. Quantum Electron. **20**, 394 (1984).
- [SCH87] E. Schöll: *Nonequilibrium Phase Transitions in Semiconductors* (Springer, Berlin, 1987).
- [SCH88j] E. Schöll: *Dynamic theory of picosecond optical pulse shaping by gain-switched semiconductor laser amplifiers*, IEEE J. Quantum Electron. **24**, 435–442 (1988).
- [SCH88i] E. Schöll and M. Schell: *Theory of ultrashort pulse generation and amplification by gain-switched semiconductor lasers*, phys. status solidi (b) **150**, 575–579 (1988).
- [SCH88l] N. Schunk and K. Petermann: *Numerical analysis of the feedback regimes for a single-mode semiconductor laser with external feedback*, IEEE J. Quantum Electron. **24**, 1242–1247 (1988).
- [SCH89] E. Schöll: *Theoretical approaches to nonlinear and chaotic dynamics of generation-recombination processes in semiconductors*, Appl. Phys. A **48**, 95 (1989).
- [SCH89h] N. Schunk and K. Petermann: *Stability analysis for laser diodes with short external cavities*, IEEE Photon. Technol. Lett. **1**, 49–51 (1989).
- [SCH89c] H. G. Schuster: *Deterministic Chaos* (VCH Verlagsgesellschaft, 1989).
- [SCH90b] M. Schell and E. Schöll: *Time-dependent simulation of a semiconductor laser amplifier: Pulse compression in a ring configuration and dynamic optical bistability*, IEEE J. Quantum Electron. **26**, 1005–1003 (1990).
- [SCH00] E. Schöll: *Nonlinear spatio-temporal dynamics and chaos in semiconductors* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [SCH04d] S. Schneider, P. Borri, W. Langbein, U. Woggon, R. L. Sellin, D. Ouyang, and D. Bimberg: *Linewidth enhancement factor in InGaAs quantum-dot amplifiers*, IEEE J. Quantum Electron. **40**, 1423–1429 (2004).
- [SCH07] E. Schöll and H. G. Schuster (Editors): *Handbook of Chaos Control* (Wiley-VCH, Weinheim, 2008), Second completely revised and enlarged edition.
- [STR94a] S. H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Westview Press, Cambridge, MA, 1994).
- [STU08] M. Stubenrauch: *Modellierung photonischer Quantenpunktbauelemente*, Master's thesis, TU Berlin (2008).

- [SU03] H. Su, L. Zhang, A. L. Gray, R. Wang, T. C. Newell, K. J. Malloy, and L. F. Lester: *High external feedback resistance of laterally loss-coupled distributed feedback quantum dot semiconductor lasers*, IEEE Photon. Technol. Lett. **15**, 1504–1506 (2003).
- [TAG93] A. A. Tager and B. B. Elenkrig: *Stability regimes and high-frequency modulation of laser diodes with short external cavity*, IEEE J. Quantum Electron. **29**, 2886–2890 (1993).
- [TAG94] A. A. Tager and K. Petermann: *High-frequency oscillations and self-mode locking in short external-cavity laser diodes*, Quantum Electronics, IEEE Journal of **30**, 1553–1561 (1994).
- [TAR98] S. Tarucha: *Transport in quantum dots: Observation of atomlike properties*, MRS Bulletin – A Publication of the Materials Research Society **23**, 49 (1998).
- [TKA86] R. Tkach and A. Chraplyvy: *Regimes of feedback effects in 1.5 – μm distributed feedback lasers*, Lightwave Technology, Journal of **4**, 1655–1661 (1986).
- [TRO84] B. Tromborg, J. H. Osmundsen, and H. Olesen: *Stability analysis for a semiconductor laser in an external cavity*, IEEE J. Quantum Electron. **20**, 1023–1032 (1984).
- [TRO06] V. Z. Tronciu, H. J. Wünsche, M. Wolfrum, and M. Radziunas: *Semiconductor laser under resonant feedback from a Fabry-Perot: Stability of continuous-wave operation*, Phys. Rev. E **73**, 046205 (2006).
- [UKH02] A. A. Ukhanov, A. Stintz, P. G. Eliseev, and K. J. Malloy: *Spectral dependence of modal gain and linewidth enhancement factor in inas quantum dot lasers*, Lasers and Electro-Optics, 2003. CLEO '03. Conference on, 1487–1490 (2002).
- [UKH04] A. A. Ukhanov, A. Stintz, P. G. Eliseev, and K. J. Malloy: *Comparison of the carrier induced refractive index, gain, and linewidth enhancement factor in quantum dot and quantum well lasers*, Appl. Phys. Lett. **84**, 1058–1060 (2004).
- [USH04] O. Ushakov, S. Bauer, O. Brox, H. J. Wünsche, and F. Henneberger: *Self-organization in semiconductor lasers with ultrashort optical feedback*, Phys. Rev. Lett. **92**, 043902 (2004).
- [POE05] M. van der Poel, E. Gehrig, O. Hess, D. Birkedal, and J. M. Hvam: *Ultrafast gain dynamics in quantum-dot amplifiers: Theoretical analysis and experimental investigations*, IEEE J. Quantum Electron. **41**, 1115–1123 (2005).
- [TAR95a] G. H. M. van Tartwijk and D. Lenstra: *Semiconductor laser with optical injection and feedback*, Quantum Semiclass. Optics, **84** (1995).
- [WET04a] R. Wetzler, A. Wacker, and E. Schöll: *Coulomb scattering with remote continuum states in quantum dot devices*, J. Appl. Phys. **95**, 7966 (2004).

- [WIE05] S. Wieczorek, B. Krauskopf, T. Simpson, and D. Lenstra: *The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers*, Physics Reports **416**, 1–128 (2005).
- [YAR97] A. Yariv: *Optical Electronics in Modern Communications* (Oxford University Press, 1997).

Danksagungen

Zuerst möchte ich Herrn Prof. Dr. Ingo Peschel dafür danken, dass er sich dazu Bereit erklärt hat, meine externe Diplomarbeit zu betreuen. Herrn Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD möchte ich für das spannende Diplomarbeitsthema und für seine nette, motivierende Art physikalische Sachverhalte zu erklären danken. Ganz herzlich bedanke ich mich bei Frau Dr. Kathy Lüdge für die Unterstützung bei meiner Diplomarbeit. Durch zahlreiche Ideen und Vorschläge hat sie maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Mit ihrer aufmunternden Art Probleme anzugehen, hat sie mich so manches Mal vor dem Verzweifeln bewahrt.

Bei der ganzen Arbeitsgruppe möchte ich mich für die nette Atmosphäre bedanken. Danken möchte ich Roland Aust, der öfter zum Diskutieren bei mir im 7.-Stock vorbeischaute und mir stets bei Computerproblemen half.

Philipp Hövel möchte ich für die Organisation zahlreicher nichtphysikalischer AG-Aktivitäten und für die Zubereitung unzähliger Tassen Espresso danken.

Valentin Flunkert möchte ich für seine anschauliche Erklärungsweise bei bifurkationstheoretischen Fragestellungen danken.

Meinem „Lieblingsroot“ Stefan Fruhner danke ich für zahlreiche Skribte sowie kurze und knackige Tutoriumsvorbereitungen.

Meinen ZimmerkollegInnen Miriam Wegert und Konstantin Hicke danke ich für die nette Zeit.

Antje bin ich dankbar für ihre optimistische Lebenseinstellung, ihre Liebe und nicht zu vergessen für ihre Geduld an dem letzten Wochenende vor der Abgabe.

**Die selbständige und eigenständige Anfertigung
versichert an Eides statt**

Berlin, den

Christian Otto
(Matrikelnr.: 4091221)